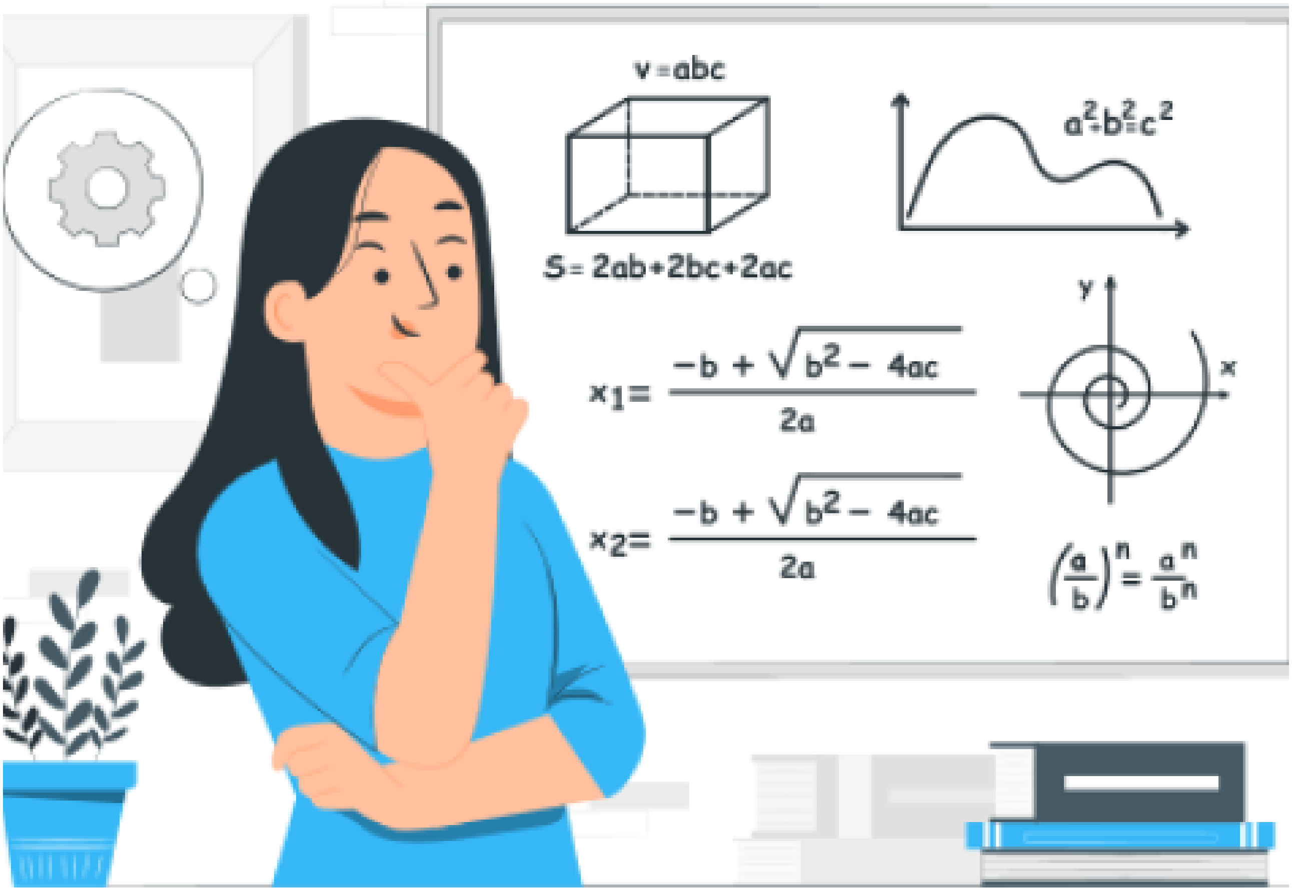


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Numerele de trei cifre $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$ au proprietatea $\overline{abc}+\overline{def}+\overline{ghi}=2023$. Toate cele nouă cifre sunt distincte și $\overline{abc}<\overline{def}<\overline{ghi}$. Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $\overline{abc}$?

Demonstrație. Vom afla care este cifra care nu poate fi scrisă printre cele nouă cifre.

$$2023=\overline{abc}+\overline{def}+\overline{ghi}=$$

$$=100\cdot a+10\cdot b+c+100\cdot d+10\cdot e+f+100\cdot g+10\cdot h+i=$$
$$=99\cdot a+9\cdot b+99\cdot d+9\cdot e+99\cdot g+9\cdot h+a+b+c+d+e+f+g+h+i=$$
$$=\mathcal{M}_9+a+b+c+d+e+f+g+h+i.$$

Numărul 2023 dă restul 7 la împărțirea prin 9, iar suma tuturor celor 10 cifre este 45, care este divizibil cu 9. Prin urmare, cifra care trebuie eliminată este 2.

- Dacă prima cifră a numărului $\overline{abc}$ ar fi cel puțin 6, atunci $\overline{abc}+\overline{def}+\overline{ghi}>600+700+800=2100>2023$. Așadar, cea mai mare valoare pe care o poate lua cifra a este 5.

Cum ne interesează cel mai mare număr de forma $\overline{abc}$ vom căuta în continuare numere cu $\boxed{a=5}$.

- Dacă $d\geq 7$, atunci $g\geq 8$ și cea mai mică sumă se obține când cifrele zecilor sunt 0, 1, 3, adică:
$$\overline{5bc}+\overline{def}+\overline{ghi}>500+700+800+30+10=2040>2023.$$
Așadar $d<7$, și cum $d>a\Rightarrow \boxed{d=6}$

Au rămas următoarele valori posibile pentru g : 7, 8 și 9.

- Dacă $g=7$, atunci cea mai mare sumă se obține când cifrele zecilor sunt 8, 9, 4 și pentru unități rămân 0, 1, 3, adică:
$$\overline{5bc}+\overline{6ef}+\overline{7hi}<500+600+700+80+90+40+1+3=2014<2023.$$

- Dacă $g=9$, atunci cea mai mică sumă se obține când cifrele zecilor sunt 0, 1, 3, adică:
$$\overline{5bc}+\overline{6ef}+\overline{9hi}>500+600+900+30+10=2040>2023.$$

În concluzie, $a=5$, $d=6$ și $g=8$. Pentru ca numărul $\overline{abc}$ să fie cât mai mare trebuie ca și celelalte două cifre ale numărului să fie cât mai mari, adică 9 și 7. Pentru $\overline{abc}=597$ nu există aranjare convenabilă pentru restul cifrelor astfel încât cifra unităților să fie 3. Pentru $\overline{abc}=579$ un exemplu este $579+601+843=2023$. Cea mai mare valoare posibilă a numărului $\overline{abc}$ este $\boxed{579}$.

Barem:

- Demonstrează că cifra care trebuie eliminată este 2. . . . . $2p$
- Demonstrează că cea mai mare valoare pe care o poate lua cifra a este 5. . . . . $1p$
- Demonstrează că dacă $a=5$, atunci $d=6$. . . . . $1p$

- Demonstrează că dacă $a = 5$ și $d = 6$, atunci $g = 8$. 1p
- Găsește că cel mai mare număr $\overline{abc}$ este 579. . . . . 1p
- Scrie un exemplu pentru numerele $\overline{abc}$, $\overline{def}$, $\overline{ghi}$. 1p

□

Problema 2

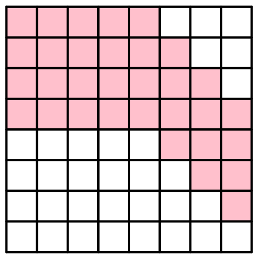
Avem un tabel 8×8 cu 64 pătrățele.

a) Este posibil să colorăm pătrățelele în roșu și alb astfel încât oricare două coloane să conțină același număr de pătrățele roșii și oricare două linii să conțină un număr diferit de pătrățele albe?

b) Este posibil să colorăm pătrățelele în roșu și alb astfel încât oricare două coloane să conțină același număr de pătrățele roșii, fiecare linie să conțină cel puțin un pătrățel roșu și oricare două linii să conțină un număr diferit de pătrățele albe?

Demonstrație.

a) Da, este posibil, o astfel de colorare este prezentată în tabelul de mai jos. Fiecare coloană are 4 pătrățele roșii (și albe) în timp ce fiecare linie succesivă are 3, 2, 1, 0, 5, 6, 7 și 8 pătrățele albe, toate fiind numere diferite.



b) Deoarece fiecare linie conține 8 pătrățele, ea poate conține de la 1 până la 8 pătrate roșii, deci 8 posibilități. Cum fiecare linie conține un număr diferit de pătrățele colorate în roșu (echivalent cu a avea număr diferit de albe), atunci avem că fiecare valoare se atinge pentru o linie. Atunci numărul total de pătrățele roșii ar fi $N_r = 1+2+...+8 = 36$.

Din condiția ca oricare două coloane să conțină același număr de pătrățele roșii avem de fapt că fiecare coloană are același număr de pătrățele roșii. Cum avem 8 coloane, înseamnă că numărul de pătrățele roșii este divizibil cu 8, adică $8 \mid N_r$, care ar fi echivalent cu $8 \mid 36$ din rezultatul anterior. Dar acest lucru este fals.

În concluzie, nu este posibil să colorăm cu aceste condiții.

Barem:

- a) Scrie un exemplu corect de colorare 3p
- b) Pe linii, calculează numărul total de pătrățele roșii $N_r = 36$. 2p
- Pe coloane, afirmă că N_r trebuie să fie divizibil cu 8 și obține contradicție. 2p

□

Problema 3

Să se determine numărul prim p pentru care numărul $A = (p^2 - 7)^2 + 33(p^2 - 7) + 630$ are suma cifrelor minimă.

Mihaela Berindeanu, București

Demonstraţie. Deoarece pentru orice număr prim p avem $A \neq 0$, atunci suma cifrelor numărului A nu poate fi 0.

- Dacă $p \neq 3$ atunci p^2 este de forma $3k + 1$ și avem:

$$\begin{cases} p^2 - 7 \,\vdots\, 3 \Rightarrow (p^2 - 7)^2 \,\vdots\, 9 \\ 33 \cdot (p^2 - 7) \,\vdots\, 9 \\ 630 \,\vdots\, 9 \end{cases}$$

  Deci A este multiplu de 9, prin urmare și suma cifrelor lui A este multiplu de 9 și deoarece $A \neq 0$ valoarea minimă a sumei cifrelor lui A este în acest caz 9.

- Dacă $p = 3 \Rightarrow A = (3^2 - 7)^2 + 33(3^2 - 7) + 630 = 4 + 33 \cdot 2 + 630 = 4 + 66 + 630 = 700$, deci suma cifrelor lui A este 7 pentru $p = 3$.

Concluzie: Suma minimă a cifrelor numărului A este 7 și se obține pentru $p = 3$.

Barem:

- Observă că $A \neq 0$ și scrie că suma cifrelor numărului A nu poate fi 0. . . . . $1p$
- Demonstrează că suma minimă a cifrelor numărului A este 9 pentru cazul $p \neq 3$. . . . . . . $4p$
- Demonstrează că suma cifrelor numărului A este 7 pentru cazul $p = 3$. . . . . $1p$
- Scrie concluzia. . . . . $1p$

□

Problema 4

Pe o tablă este scris un număr natural nenul. Ana și Bogdan joacă un joc: se scade din numărul scris pe tablă unul dintre divizorii lui și se înlocuiește numărul de pe tablă cu rezultatul scăderii.

De exemplu, dacă pe tablă este scris inițial numărul 40, *atunci Ana îl poate înlocui cu* $40 - 8 = 32$, *apoi Bogdan îl poate înlocui pe* 32 *cu* $32 - 16 = 16$, *și așa mai departe.*

Pierde jucătorul care este nevoit să scrie pe tablă numărul 0. Cea care face prima mișcare este Ana. Care copil are strategie de câștig și care este aceasta?

Demonstraţie. Să remarcăm mai întâi că, dacă la un moment dat un copil găsește scris pe tablă numărul 1, atunci acesta pierde pentru că singurul divizor al lui 1 este el însuși și este nevoit să scrie pe tablă numărul 0.

- Dacă numărul scris inițial pe tablă este par, atunci Ana are strategie de câștig: scade din numărul de pe tablă 1 și scrie pe tablă un număr impar. Acesta are toți divizorii impari, iar Bogdan poate să scadă doar un număr impar, lăsând scris pe tablă un număr par sau 0. Dacă a scris 0, atunci a pierdut Bogdan, altfel Ana își continuă strategia.

- Dacă numărul scris inițial pe tablă este impar, atunci Bogdan este cel care are strategie de câștig pentru că Ana poate să scadă doar un număr impar pentru că toți divizorii unui număr impar sunt impari și diferența a două numere impare este pară. De aici Bogdan va proceda ca la cazul anterior.

Barem:

- Prezintă strategia de câștig pentru cazul par 2p
- Justifică de ce aceasta este o strategie corectă de câștig 2p
- Prezintă strategia de câștig pentru cazul impar 2p
- Justifică de ce aceasta este o strategie corectă de câștig 1p

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: 0p
Total: 28p

Timp de lucru: . . . . 3 ore