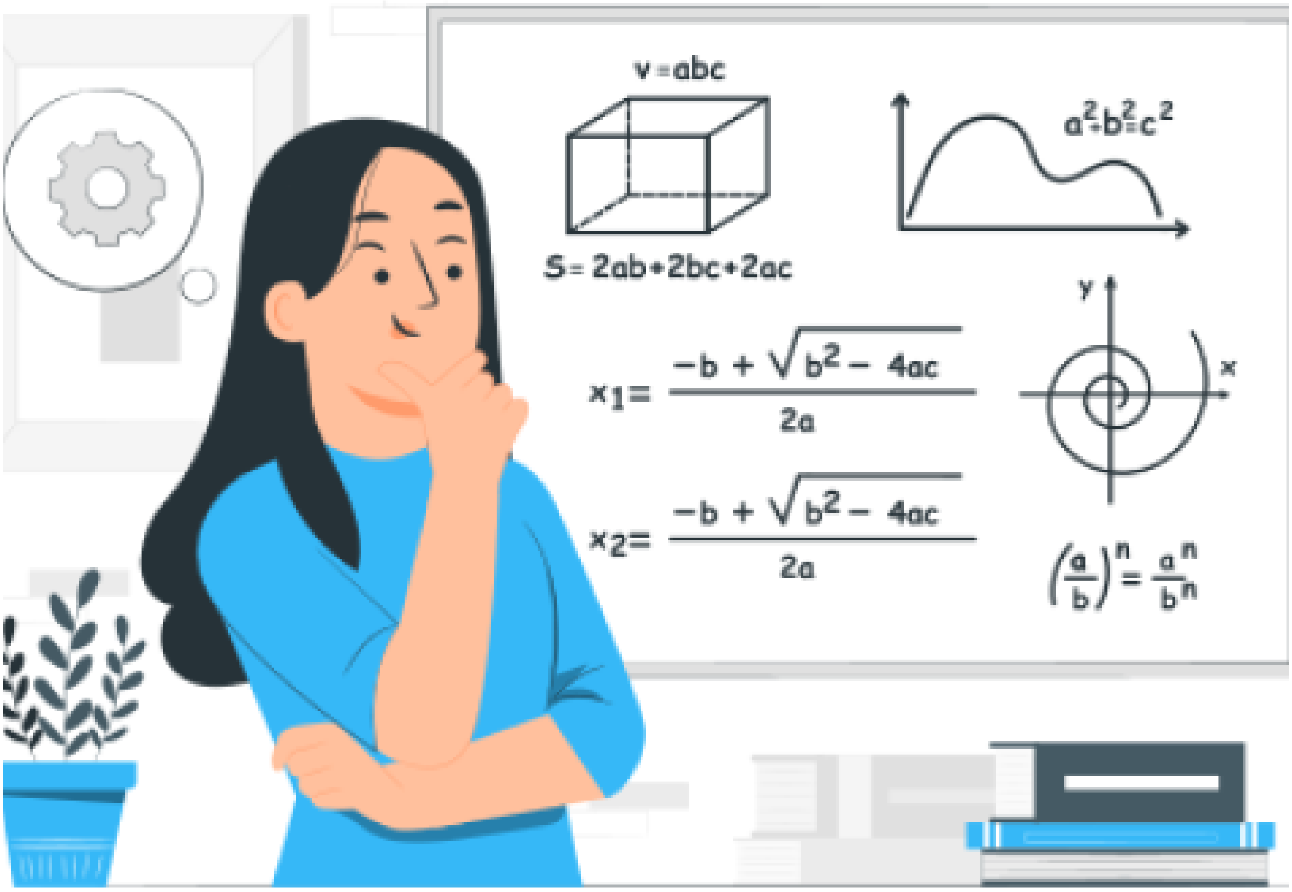


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 4$. Demonstrați că $\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 < 2$.

b) Determinați toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, c), $a \leq b \leq c$ pentru care are loc relația:
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2.$$

Demonstrație.

a) Vom demonstra mai întâi că $\frac{a+2}{a+1} < \frac{a+1}{a}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, aducând la numitor comun obținem:
$$\frac{a(a+2)}{a(a+1)} < \frac{(a+1)^2}{a(a+1)} \iff a^2+2a < a^2+a+a+1 \iff 0 < 1.$$
Din $\frac{a+2}{a+1} < \frac{a+1}{a} \implies \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^3 < \left(\frac{a+1}{a}\right)^3$ de unde obținem:
$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 \text{ pentru orice } a \geq 4.$$

b) Din $a \leq b \leq c$ rezultă că $1+\frac{1}{b} \leq 1+\frac{1}{a}$ și $1+\frac{1}{c} \leq 1+\frac{1}{a}$ și obținem:
$$2 = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leq \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{a+1}{a}\right)^3.$$
Conform punctului anterior trebuie să avem $a \leq 3$. Mai de parte, rescriem ecuația astfel:
$$(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc.$$

- Dacă $a = 1$, atunci $(b+1)(c+1) = bc \iff b+c+1 = 0$, ceea ce nu este posibil.
- Dacă $a = 2$, atunci $3(b+1)(c+1) = 4bc \iff (b-3)(c-3) = 12$. Deoarece $b \leq c$ avem de analizat doar trei posibilități:
  ∘ $b-3 = 1$ și $c-3 = 12$ cu soluția $(a, b, c) = (2, 4, 15)$;
  ∘ $b-3 = 2$ și $c-3 = 6$ cu soluția $(a, b, c) = (2, 5, 9)$;
  ∘ $b-3 = 3$ și $c-3 = 4$, cu soluția $(a, b, c) = (2, 6, 7)$.
- Dacă $a = 3$, atunci $4(b+1)(c+1) = 6bc \iff (b-2)(c-2) = 6$. Deoarece $b \leq c$ avem de analizat doar două posibilități:
  ∘ $b-2 = 1$ și $c-2 = 6$ cu soluția $(a, b, c) = (3, 3, 8)$;
  ∘ $b-2 = 2$ și $c-2 = 3$ cu soluția $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

În concluzie soluțiile sunt $(a, b, c) \in \{(2, 4, 15), (2, 5, 9), (2, 6, 7)(3, 3, 8), (3, 4, 5)\}$.

Barem:

- a) Demonstrează că $\frac{a+2}{a+1} < \frac{a+1}{a}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$. 1p
- Demonstrează că $\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2$ pentru orice $a \geq 4$. 1p

- b) Aplică punctul anterior și demonstrează că $a \leq 3$. 2p
- Analizează cazul $a = 1$ și afirmă că nu există soluții. 1p
- Analizează cazul $a = 2$ și găsește toate soluțiile. 1p
- Analizează cazul $a = 3$ și găsește toate soluțiile. 1p

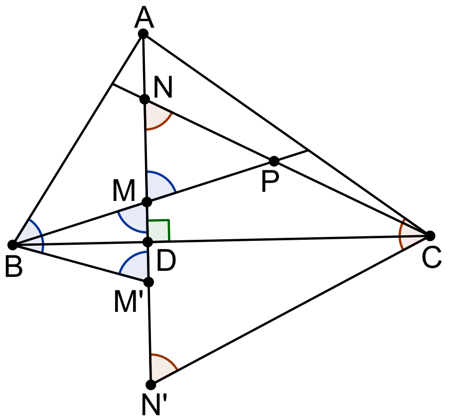
□

Problema 2

În $\triangle ABC$ ducem $AD \perp BC, D \in BC$. Pe segmentul AD se consideră punctele M și N astfel încât $AD + DM = AB$ și $AD + DN = AC$. Notăm cu P intersecția dreptelor BM și CN. Arătați că $m(\angle BAC) = 2 \cdot m(\angle MPN)$.

Adrian Bud, Negrești Oaș

Demonstrație. Notăm cu M' și N' simetricele punctelor M respectiv N față de punctul D.



$AM' = AD + DM' = AD + DM = AB \implies \triangle ABM'$ este isoscel cu:

$$m(\angle AM'B) = m(\angle ABM') = \frac{180^\circ - m(\angle BAM')}{2} = \frac{180^\circ - m(\angle BAD)}{2}$$

$AN' = AD + DN' = AD + DN = AC \implies \triangle ACN'$ este isoscel cu:

$$m(\angle AN'C) = m(\angle ACN') = \frac{180^\circ - m(\angle CAN')}{2} = \frac{180^\circ - m(\angle CAD)}{2}$$

B se găsește pe mediatoarea segmentului $MM' \implies \triangle BMM'$ este isoscel cu

$$m(\angle M'MB) = m(\angle MM'B) = m(\angle AM'B) = \frac{180^\circ - m(\angle BAD)}{2}$$

Deoarece unghiurile $\angle PMN$ și $\angle M'MB$ sunt opuse la vârf, obținem:

$$m(\angle PMN) = m(\angle M'MB) = \frac{180^\circ - m(\angle BAD)}{2}$$

C se găsește pe mediatoarea segmentului $NN' \implies \triangle CNN'$ este isoscel cu

$$m(\angle N'NC) = m(\angle NN'C) = m(\angle AN'C) = \frac{180^\circ - m(\angle CAD)}{2}$$

În $\triangle MNP$ avem:

$$m(\angle MPN) = 180^\circ - m(\angle PNM) - m(\angle PMN) =$$
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - m(\angle CAD)}{2} - \frac{180^\circ - m(\angle BAD)}{2} =$$
$$= \frac{m(\angle CAD) + m(\angle BAD)}{2} = \frac{m(\angle BAC)}{2}$$

Deci $m(\angle BAC) = 2 \cdot m(\angle MPN)$.

Barem:

- Demonstrează că $\triangle ABM'$ este isoscel . . . . $1p$
- Demonstrează că $\triangle BMM'$ este isoscel . . . . $1p$
- Determină $m(\angle PMN) = \dfrac{180^\circ - m(\angle BAD)}{2}$ . . . . $1p$
- Demonstrează că $\triangle ACN'$ este isoscel . . . . $1p$
- Demonstrează că $\triangle CNN'$ este isoscel . . . . $1p$
- Determină $m(\angle MNP) = \dfrac{180^\circ - m(\angle CAD)}{2}$ . . . . $1p$
- Finalizează demonstrația . . . . $1p$

□

Problema 3

Se consideră două mulțimi de numere întregi A și B cu proprietatea că $a - b$ divide 4 pentru orice $a \in A$ și $b \in B$. Să se arate că mulțimea $A \cup B$ are cel mult 7 elemente.

Dinu Șerbănescu, București

Demonstrație. Să observăm că $A \cap B = \emptyset$, deoarece dacă există $x \in A \cap B$, atunci $0 = x - x \mid 4$, fals. Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ elementele mulțimii A și $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$ elementele mulțimii B, $n, m \in \mathbb{N}^*$. Din ipoteză deducem că $a_i - b_j \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ și deci $a_i - b_j \leq 4$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$ și $j = 1, 2, \ldots, m$. Cum $A \cap B = \emptyset$ avem $a_1 \neq b_1$ și fie $a_1 < b_1$. Atunci $0 < b_1 - a_1 < b_2 - a_1 < \ldots < b_m - a_1$ și $b_j - a_1 \in \{1, 2, 4\}$ de unde rezultă că $m \leq 3$ și $b_m \leq a_1 + 4$. Analizăm cazurile:

- $b_m = a_1 + 4$. Cum $a_n - b_m \leq 4$ rezultă că $a_n \leq b_m + 4 \leq a_1 + 8$, deci $A \cup B \subset \{a_1, a_1 + 1, \ldots, a_1 + 8\}$. Dacă $a_n = b_m + 4 = a_1 + 8$ atunci $m = 1$ și $b_1 = a_1 + 4$, altfel $a_n - b_1 > a_n - b_m \geq 4$, contradicție. Rezultă că $a_1 + 1 \notin A$ și $a_1 + 7 \notin A$, deoarece $b_1 - (a_1 + 1) = 3 \nmid 4$ și $a_1 + 7 - b_1 = 3 \nmid 4$ adică $A \cup B$ este inclusă într-o mulțime cu 7 elemente. Cum $A \cap B = \emptyset$, concluzia rezultă. Dacă $a_n < b_m + 4$, atunci $a_n \leq b_m + 2$ căci $a_n - b_m \neq 3$. Obținem $A \cup B \subset \{a_1, \ldots, a_1 + 6\}$ și cerința este îndeplinită ca în situația anterioară.

- $b_m \neq a_1 + 4$. Atunci $b_m \leq a_1 + 2$ și apoi $a_n \leq b_m + 4 \leq a_1 + 6$, deci $A \cup B \subset \{a_1, \ldots, a_1 + 6\}$, ceea ce încheie demonstrația. Un exemplu de mulțimi cu proprietatea din enunț este $A = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ și $\{0\}$.

Soluție alternativă: Vom nota cu $m = |A|$ și cu $b = |B|$. Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $x_1 < x_2 < \dots x_m$ și $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Atunci

$$x_1 - y_n < x_1 - y_{n-1} < \dots x_1 - y_1 < x_2 - y_1 < \dots < x_m - y_1.$$

Toate aceste diferențe sunt în număr de $m+n-1$ și fiecare dintre ele este divizor întreg distinct al lui 4, adică fac parte din mulțimea $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ care are 6 elemente. Deci $m+n-1 \leq 6$, adică $m+n \leq 7$.

Barem:

- Demonstrează că $A \cap B = \emptyset$ 1*p*
- Demonstrează că $m \leq 3$ 1*p*
- Analizează cazul $b_m = a_1 + 4$ 3*p*
- Analizează cazul $b_m \neq a_1 + 4$ 2*p*

□

Problema 4

Demonstrați că nu există trei numere naturale nenule a, b, c cu proprietatea că numerele (a,b), (b,c), (c,a), $(a,b)+(b,c)$, $(b,c)+(c,a)$, $(c,a)+(a,b)$ sunt toate pătrate perfecte.

Andrei Bâra

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că există astfel de numere. Fie:

$$d = (a,b,c),\ dx = (b,c),\ dy = (a,c),\ dz = (a,b) \text{ cu } (x,y) = (y,z) = (z,x) = 1.$$

Avem că dx, dy, dz, $d(x+y)$, $d(y+z)$, $d(z+x)$ sunt toate pătrate perfecte. Atunci, $d^2xy = dx \cdot dy$ este pătrat perfect, și cum și d^2 este pătrat perfect, rezultă că xy este pătrat perfect. Dar $(x,y) = 1 \Rightarrow x, y$ sunt ambele pătrate perfecte. Cum dx este pătrat perfect, rezultă că și d este pătrat perfect. Analog demonstrăm și că z este pătrat perfect.

Cum $(x,y) = (y,z) = (z,x) = 1$, rezultă că printre numerele x, y, z poate exista cel mult unul par (în caz contrar, dacă ar fi două, atunci cel mai mare divizor comun al lor ar fi un multiplu de 2). Astfel, printre numerele x, y, z există cel puțin două numere impare. Fără a restrânge generalitatea să presupunem că acestea sunt y și z. Atunci, întrucât y și z sunt pătrate perfecte impare, ele sunt de forma $M_4 + 1$ și obținem că $y + z = M_4 + 2$. Rezultă că $(y+z)$ nu poate fi pătrat perfect. Dar, pe de altă parte, $d(y+z)$ este pătrat perfect, la fel ca și d, de unde rezultă că $(y+z)$ este pătrat perfect, contradicție. Așadar presupunerea făcută este falsă și atunci nu există numere a, b, c cu proprietatea din enunț.

Barem:

- Consideră $d = (a,b,c)$, $dx = (b,c)$, $dy = (a,c)$, $dz = (a,b)$ cu $(x,y) = (y,z) = (z,x) = 1$. 1*p*
- Demonstrează că d, x, y și z sunt pătrate perfecte. 3*p*
- Demonstrează că printre numerele x, y, z există cel puțin două numere impare 1*p*
- Demonstrează că $y + z = M4 + 2$ și afirmă că nu poate fi pătrat perfect. 1*p*

- Demonstrează că $y+z$ este pătrat perfect și obține contradicția. . . . . $1p$

$\square$

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$

Timp de lucru: . . . . 3 ore