



**Concursul de matematică Upper.School  
Ediția 2022-2023**

**Etapa III  
Clasa a VI-a**

**- Subiecte -  
Lioara Ivanovici**

## §1 Subiecte

### Problema 1

- a) Fie  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \geq 4$ . Demonstrați că  $\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 < 2$ .
- b) Determinați toate tripletele de numere naturale nenule  $(a, b, c)$ ,  $a \leq b \leq c$  pentru care are loc relația:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

### Problema 2

În  $\triangle ABC$  ducem  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ . Pe segmentul  $AD$  se consideră punctele  $M$  și  $N$  astfel încât  $AD + DM = AB$  și  $AD + DN = AC$ . Notăm cu  $P$  intersecția dreptelor  $BM$  și  $CN$ . Arătați că  $m(\angle BAC) = 2 \cdot m(\angle MPN)$ .

Adrian Bud, Negrești Oaș

### Problema 3

Se consideră două mulțimi de numere întregi  $A$  și  $B$  cu proprietatea că  $a - b$  divide 4 pentru orice  $a \in A$  și  $b \in B$ . Să se arate că mulțimea  $A \cup B$  are cel mult 7 elemente.

Dinu Șerbănescu, București

### Problema 4

Demonstrați că nu există trei numere naturale nenule  $a, b, c$  cu proprietatea că numerele  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ ,  $(c, a)$ ,  $(a, b) + (b, c)$ ,  $(b, c) + (c, a)$ ,  $(c, a) + (a, b)$  sunt toate pătrate perfecte.

Andrei Bâra

Problemele 1-4: .....  $4 \times 7p = 28p$

Puncte acordate din oficiu: .....  $0p$

Total: .....  $28p$

Timp de lucru: ..... 3 ore