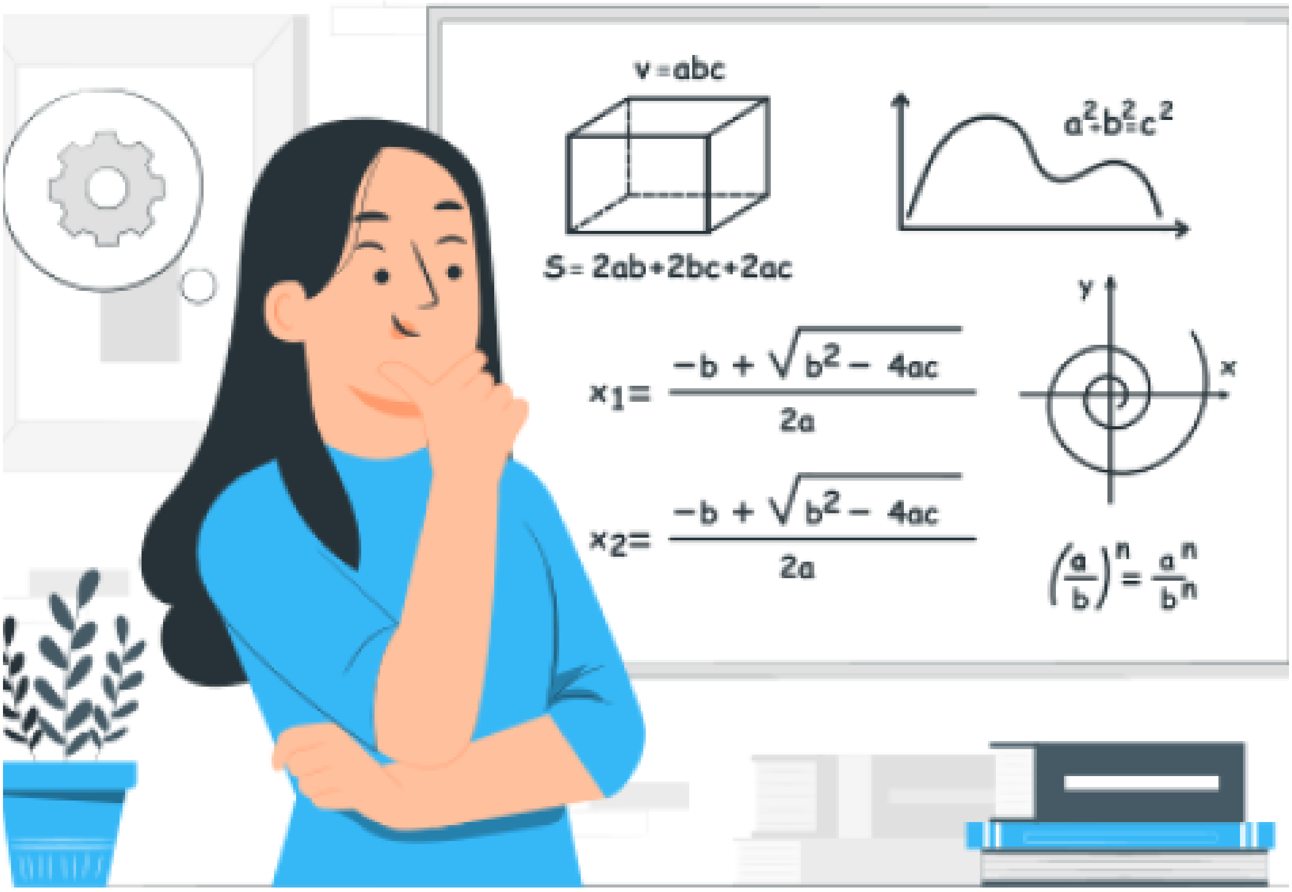


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa III
Clasa a VII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Ana și Bogdan joacă un joc pe o tablă pătrată $n \times n$ (n linii și n coloane). Ana începe jocul și de fiecare dată când unui copil îi vine rândul să joace acesta completează un pătrățel gol cu un număr natural. La sfârșitul jocului câștigă Bogdan dacă pe fiecare linie suma numerelor este divizibilă cu 3, în caz contrar câștigă Ana. Stabiliți cine are strategie de câștig și care este aceasta.

Demonstrație. Deoarece ne interesează să vedem dacă suma numerelor este divizibilă cu 3, putem lua în considerare doar resturile numerelor scrise de Ana și Bogdan la împărțirea cu 3. Astfel, când ei completează un pătrățel gol, este echivalent cu a completa cu restul împărțirii la 3 a numărului, deci 0, 1 sau 2.

- Dacă n este par, Bogdan are o strategie de câștig. Considerăm că $n = 2k$, k număr natural nenul. Bogdan împarte fiecare linie în k piese de domino (câte 2 pătrățele alăturate în pereche). Când Ana completează un pătrățel, Bogdan completează perechea din piesa de domino astfel încât suma numerelor de pe piesă să fie divizibilă cu 3 (dacă Ana scrie 0, 1 sau 2, Bogdan scrie $0, 2$ respectiv 1). Astfel, suma tuturor numerelor de pe cele k piese de domino în fiecare linie va fi divizibilă cu 3, deci fiecare linie are suma divizibilă cu 3.
- Dacă n este impar, Ana are o strategie de câștig. Luăm $n = 2k + 1$, k natural. Ana completează primul pătrățel de pe prima linie cu 1 și după aplică aceeași strategie pe care ar aplica-o Bogdan în cazul anterior pentru cele $2k$ pătrățele rămase de pe prima linie. Dacă Bogdan pune un număr pe una dintre celelalte linii, atunci Ana va pune și ea la întâmplare un număr pe una dintre celelalte linii. Cum numărul de pătrățele de pe celelalte linii este par, Bogdan va fi primul care va fi forțat să joace pe prima linie. Scopul final al Anei este să fie cel puțin o linie cu suma nedivizibilă cu 3, deci nu contează suma de pe celelalte linii. În final, suma numerelor de pe prima linia este $M_3 + 1$, și Ana câștigă jocul.

Barem:

- Prezintă strategia de câștig pentru cazul par .... $2p$
- Justifică de ce aceasta este o strategie corectă de câștig .... $1p$
- Prezintă strategia de câștig pentru cazul impar .... $2p$
- Justifică de ce aceasta este o strategie corectă de câștig .... $2p$

□

Problema 2

Fie numerele naturale a și b care verifică simultan relațiile $|a - b| \geq 2$, $|b - 2| \geq a$, $|2 - a| \geq b$. Arătați că numărul $2^a - 2^b$ sau $2^{a+b} - 1$ este divizibil cu 3.

Mihaela Berindeanu, București

Demonstrație. Scriem forme echivalente ale relațiilor din enunț :

$$|a-b| \geq 2 \iff (a-b)^2 \geq 4 \iff 0 \geq (2-a+b)(2+a-b)$$

$$|b-2| \geq a \iff (b-2)^2 \geq a^2 \iff 0 \geq (a-b+2)(a+b-2)$$

$$|2-a| \geq b \iff (2-a)^2 \geq b^2 \iff 0 \geq (b-2+a)(b+2-a)$$

Produsul a trei numere negative este negativ

$$0 \geq (a-b+2)^2(a+b-2)^2(b-a+2)^2 \quad (1)$$

dar produsul a trei pătrate este pozitiv

$$0 \leq (a-b+2)^2(a+b-2)^2(b-a+2)^2 \quad (2)$$

Din (1), și (2) obținem:

$$0 = (a-b+2)^2(a+b-2)^2(b-a+2)^2$$

Analizăm cazurile:

- Cazul $a-b+2=0 \implies b=a+2 \implies 2^a-2^b = 2^a-2^{a+2} = 2^a(1-4) = -3\cdot 2^a \,\vdots\, 3$
- Cazul $a+b-2=0 \implies a+b=2 \implies 2^{a+b}-1 = 2^2-1 = 4-1 = 3 \,\vdots\, 3$
- Cazul $b-a+2=0 \implies a=b+2 \implies 2^a-2^b = 2^{b+2}-2^b = 2^b(4-1) = 3\cdot 2^b \,\vdots\, 3$

Barem:

- Scrie formele echivalente ale relațiilor din enunț. 1p
- Obține inegalitatea (1). 1p
- Obține inegalitatea (2). 1p
- Obține că $0 = (a-b+2)^2(a+b-2)^2(b-a+2)^2$ 1p
- Analizează cazul $a-b+2=0$. 1p
- Analizează cazul $a+b-2=0$. 1p
- Analizează cazul $b-a+2=0$. 1p

□

Problema 3

Fie $ABCD$ un pătrat, E, F două puncte, $E \in (AB)$ și $C \in (BF)$ astfel încât $AE = CF$. Considerăm $M \in (AB)$, $N \in (CD)$ astfel încât $AM = DN$ și notăm $\{G\} = MN \cap DF$, $\{H\} = EG \cap AN$, $\{I\} = FE \cap AC$.

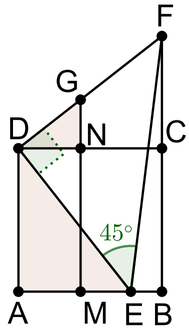
a) Demonstrați că are loc relația $DA \cdot DG = AM \cdot DE$;

b) Aflați măsura unghiului $\angle IHG$.

Andrei Bâra, București

Demonstrație.

a) Să observăm mai întâi că $\triangle ADE \equiv \triangle CDF$ (1) în cazul CC, deci $DF \equiv DE$ și $\angle FDC \equiv \angle ADE \implies m(\angle EDF) = 90°$. Așadar, triunghiul $\triangle DEF$ este un triunghi dreptunghic isoscel.

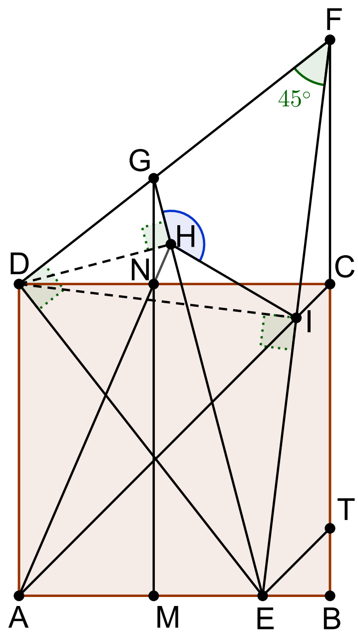


Vom demonstra că $\triangle ADE \sim \triangle NDG$. Din (1) $\implies \angle ADE \equiv \angle NDG$ și $m(\angle DAE) = m(\angle DNG) = 90° \implies \triangle ADE \sim \triangle NDG$ în cazul de asemănare UU. De aici obținem că:

$$\frac{DA}{DN} = \frac{DE}{DG} \iff DA \cdot DG = DN \cdot DE.$$

Din ipoteză știm că $AM = DN$, înlocuim în ultima egalitate și rezultă $DA \cdot DG = AM \cdot DE$.

b) Punctul anterior este echivalent cu $\triangle DAN \sim \triangle DEG \implies \angle DAN \equiv \angle DEG \equiv \angle DEH \implies$ patrulaterul $DAEH$ este inscriptibil $\implies m(\angle DHE) = 90°$.



În continuare vom demonstra că $DI \perp EF$.

∘ Fie aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle FEB$ cu transversala $A - I - C$, și obținem $FI = IE$.

∘ Fie considerăm punctul T pe (BC) astfel încât $BE = BT \iff CT = AE$. Cum $AE = CF \implies CT = CF$. Pe de altă parte $ET \parallel AC$ pentru că $\angle ACB \equiv \angle ETB$ și sunt unghiuri corespondente, iar (IC) devine linie mijlocie în $\triangle FET$ de unde $(FI) \equiv (IE)$.

Știm de la punctul anterior că $\triangle DEF$ este un triunghi dreptunghic isoscel. Prin urmare, în triunghiul isoscel $\triangle DEF$ mediana DI este și înălțime, deci $DI \perp EF \iff m(\angle DIE) = 90°$. Am demonstrat și că $m(\angle DHE) = 90°$ de unde obținem că patrulaterul $DHIE$ este inscriptibil. De aici găsim $m(\angle DHI) = 180° - m(\angle DEI) = 135°$. Se obține astfel că $m(\angle IHG) = 360° - m(\angle IHD) - m(\angle DHG) = 360° - 135° - 90° = 135°$.

Barem:

- a) Demonstrează că triunghiul $\triangle DEF$ este un triunghi dreptunghic isoscel. 1p
- Demonstrează că $\triangle ADE \sim \triangle NDG$ și obține relația din enunț. 1p
- b) Demonstrează că $m(\angle DHE) = 90°$. 1p
- Demonstrează că $m(\angle DIE) = 90°$. 1p
- Obține că patrulaterul $DHIE$ este inscriptibil și $m(\angle DHI) = 135°$. 2p
- Demonstrează că $m(\angle IHG) = 135°$. 1p

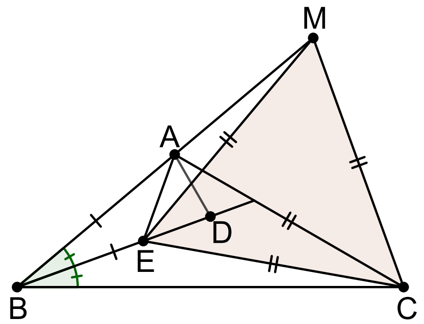
□

Problema 4

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) = 2m(\angle B) + m(\angle C)$. Pe bisectoarea $\angle ABC$ se consideră punctele E și D în interiorul $\triangle ABC$ astfel încât $BA = BD$ și $CE = CA$. Aflați măsurile unghiurilor $\triangle ABC$ știind că $\triangle AED$ este isoscel.

Adrian Bud, Negrești Oaș

Demonstrație. Notăm $m(\angle ABC) = x°$ și $m(\angle ACB) = y°$.



$$m(\angle BAC) = 2x° + y° \implies 180° = (2x° + y°) + x° + y° = 3x° + 2y°.$$

În triunghiul isoscel $\triangle ABD$ avem:

$$m(\angle BAD) = m(\angle BDA) = \frac{180° - m(\angle ABD)}{2} = 90° - \frac{x°}{4}.$$

Pe prelungirea laturii BA se consideră punctul M astfel încât $CM = CA$. Atunci, unghiul $\angle MAC$ este unghi exterior triunghiului $\triangle ABC$ și obținem:

$$m(\angle MAC) = m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = x° + y°.$$

În triunghiul isoscel $\triangle CAM$ avem:

$$m(\angle MAC) = m(\angle CMA) = x° + y° \implies m(\angle MCA) = 180° - 2(x° + y°) = x°.$$

Astfel:

$$m(\angle BCM) = m(\angle BCA) + m(\angle ACM) = x° + y°.$$

În $\triangle BCM$ avem $m(\angle BCM) = m(\angle CMA) = x^\circ + y^\circ$, deci triunghiul $\triangle BCM$ este isoscel cu $BC = BM$.

$$\left.\begin{array}{c}[BE] \equiv [BE] \\ \angle MBE \equiv \angle CBE \\ [BM] \equiv [BC]\end{array}\right\} \stackrel{LUL}{\Longrightarrow} \triangle BEM \equiv \triangle BEC \implies [EM] \equiv [EC].$$

Dar $[EC] \equiv [CA] \equiv [CM]$, deci triunghiul $\triangle ECM$ este echilateral.

$$m(\angle ACE) = m(\angle MCE) - m(\angle MCA) = 60^\circ - x^\circ.$$

În triunghiul isoscel $\triangle CAE$ avem:

$$m(\angle CAE) = m(\angle CEA) = \frac{180^\circ - m(\angle ACE)}{2} = 60^\circ + \frac{x^\circ}{2}.$$

Unghiul $\angle DEC$ este exterior triunghiului $\triangle EBC$ și obținem:

$$m(\angle DEC) = m(\angle EBC) + m(\angle ECB) = \frac{x^\circ}{2} + y^\circ - (60^\circ - x^\circ) =$$

$$= \frac{x^\circ + 2y^\circ - 120^\circ + 2x^\circ}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Calculăm $m(\angle AED)$ astfel:

$$m(\angle AED) = m(\angle AEC) - m(\angle DEC) = 60^\circ + \frac{x^\circ}{2} - 30^\circ = 30^\circ + \frac{x^\circ}{2}.$$

În triunghiul $\triangle AED$ avem:

$$m(\angle EAD) = 180^\circ - (m(\angle AED) + m(\angle ADE)) =$$

$$= 180^\circ - \left(30^\circ + \frac{x^\circ}{2} + 90^\circ - \frac{x^\circ}{4}\right) = 60^\circ - \frac{x^\circ}{4}.$$

Deoarece triunghiul $\triangle AED$ este isoscel avem de analizat următoarele 3 cazuri:

- *Cazul 1*: $m(\angle DAE) = m(\angle ADE) \iff 60^\circ - \frac{x^\circ}{4} = 90^\circ - \frac{x^\circ}{4}$. Contradicție.
- *Cazul 2*: $m(\angle DEA) = m(\angle ADE) \iff 30^\circ + \frac{x^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{x^\circ}{4} \implies x^\circ = 80^\circ$ și $y^\circ < 0^\circ$. Contradicție.
- *Cazul 3*: $m(\angle DAE) = m(\angle DEA) \iff 60^\circ - \frac{x^\circ}{4} = 30^\circ + \frac{x^\circ}{2} \implies x^\circ = 40^\circ$, $y^\circ = 30^\circ$ și $m(\angle BAC) = 110^\circ$

Barem:

- Determină $m(\angle ADE) = m(\angle ADB) = 90^\circ - \frac{x^\circ}{4}$. 1*p*
- Demonstrează că triunghiul $\triangle BCM$ este isoscel cu $BC = BM$. 1*p*
- Demonstrează că $\triangle BEM \equiv \triangle BEC$. 1*p*
- Demonstrează că triunghiul $\triangle ECM$ este echilateral. 1*p*
- Determină $m(\angle AED) = 30^\circ + \frac{x^\circ}{2}$. 1*p*

- Demonstrează că pentru primele 2 *cazuri* nu există soluții. 1p
- Analizează *cazul* 3 și găsește soluția 40°, 30° și 110°. 1p

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: 0p
Total: 28p

Timp de lucru: . . . . 4 ore