



**Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023**

**Etapa III
Clasa a VIII-a**

**- Subiecte -
Lioara Ivanovici**

§1 Subiecte

Problema 1

a) Fie $a, b > 0$. Demonstrați că $1 + \frac{3a}{b} \geq \frac{16a}{a + 3b}$.

b) Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că are loc inegalitatea

$$3 \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 1 \right) \geq 16 \left(\frac{a}{a + 3b} + \frac{b}{b + 3c} + \frac{c}{c + 3a} \right).$$

Mihaela Berindeanu

Problema 2

Înălțimile unui tetraedru sunt concurente într-un punct H și formează, luate două câte două, unghiuri congruente de măsură α° . Care este valoarea pentru $\cos \alpha$?

Problema 3

Într-un tablou pătratic cu 5 linii și 5 coloane sunt scrise numere: unele dintre ele sunt 1, iar celelalte sunt -1 . Numim *rând* o linie sau o coloană. O *mutare* înseamnă selectarea unui rând și schimbarea semnelor celor 5 numere de pe acel rând.

- Să se arate că este totdeauna posibil să efectuăm câteva mutări astfel încât să obținem un tablou care are pe fiecare rând (din cele 10) cel puțin trei numere negative.
- Este totdeauna posibil să efectuăm câteva mutări astfel încât să obținem toate numerele tabloului egale cu 1?

Dinu Șerbănescu

Problema 4

Fie $A \subset \mathbb{N}^*$ o mulțime finită cu proprietatea că dacă $a, b \in A$, $a < b$ și $a \nmid b$, atunci:

$$\frac{ab - a - b}{(a, b)} \in A.$$

Aflați toate mulțimile A cu această proprietate.

Andrei Bâra

Problemele 1-4: $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: $0p$
Total: $28p$

Timp de lucru: 4 ore