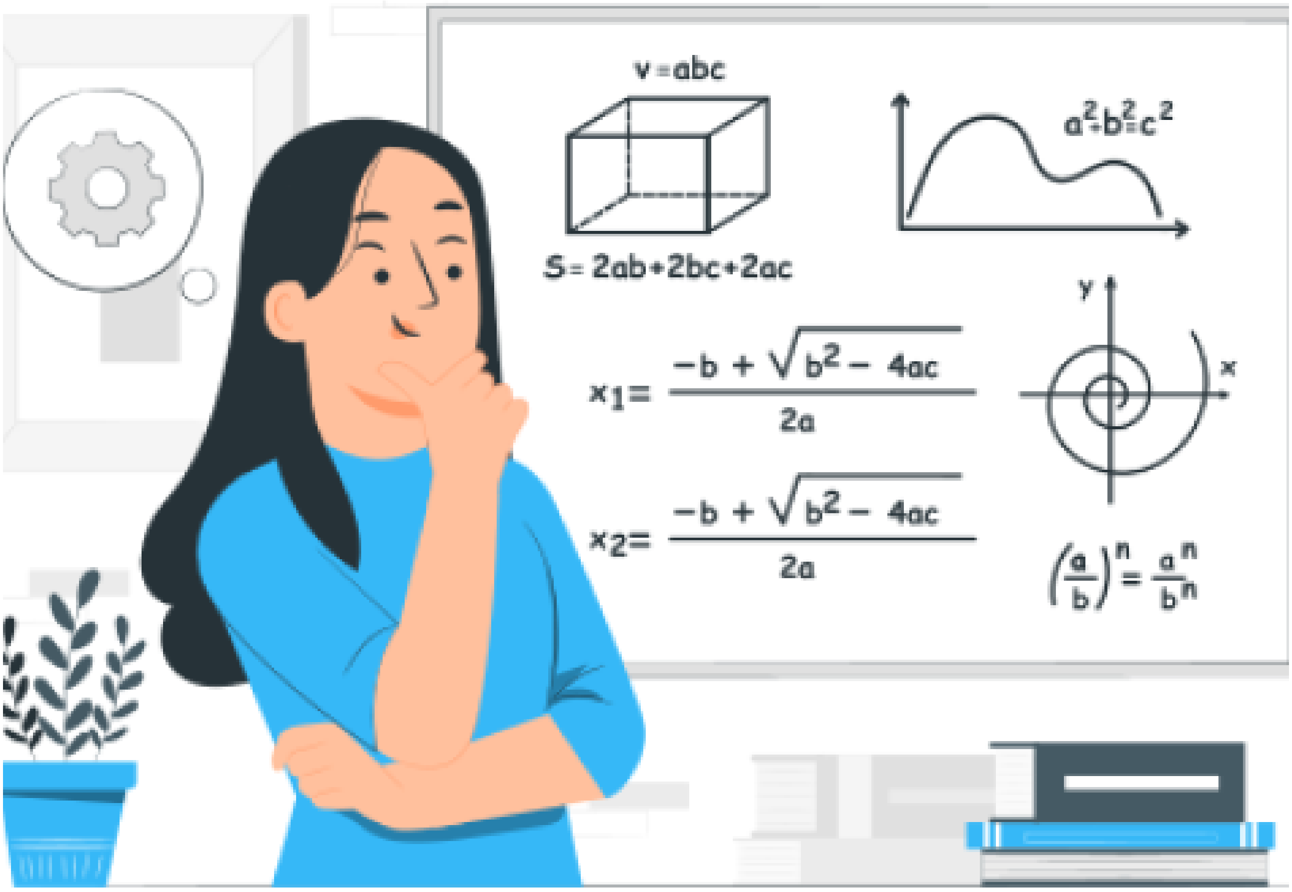

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa I
Clasa a V-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud, Bogdan Georgescu

§1 Soluții

Problema 1

Rezultatul calculului 20232023 : 2023 este egal cu:

a) 11 b) 101 c) 1001 d) 10001

Demonstrație. $20232023 = 20230000 + 2023 = 2023 \cdot 10000 + 2023 = 2023 \cdot (10000 + 1) = 2023 \cdot 10001$. Rezultatul împărțirii este egal cu $\boxed{10001}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Cel mai mare număr natural impar de patru cifre care are suma cifrelor 19 este cuprins între numerele naturale:

a) 9800 și 9830 b) 9700 și 9825 c) 9899 și 9904 d) 9908 și 9951

Demonstrație. Dintre două numere naturale de 4 cifre este mai mare cel care are cifra miilor cea mai mare. Dacă au aceeași cifră a miilor, atunci mai mare este cel care are cifra sutelor mai mare și se continuă raționamentul până la cifra zecilor. Cel mai mare număr natural de 4 cifre care are suma cifrelor 19 este 9910, însă acesta este număr par. Așa încât mutăm cifra 1 la unități și numărul căutat este 9901.

- $9830 < 9901$, deci varianta $a)$ nu este corectă;
- $9825 < 9901$, deci varianta $b)$ nu este corectă;
- $9899 < 9901 < 9904$, deci varianta $c)$ este corectă;
- $9901 < 9908$, deci varianta $d)$ nu este corectă.

Numărul 9901 este cuprins între $\boxed{9899 \text{ și } 9904}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Produsul a trei numere naturale consecutive este de 48 de ori mai mare decât produsul celor mai mici două numere dintre ele. Produsul celor mai mici două numere dintre ele este egal cu:

a) 2162 b) 2262 c) 2450 d) 2172

Demonstrație. Dacă notăm cu a cel mai mic dintre numere, atunci relația din enunțul problemei se scrie

$$a \cdot (a+1) \cdot (a+2) = 48 \cdot a \cdot (a+1)\,.$$

Așadar, cel mai mare dintre cele 3 numere consecutive este 48, iar numerele mai mici sunt 46 și 47 cu produsul $46 \cdot 47 = \boxed{2162}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

$\square$

Problema 4

Rezultatul calculului $(1 + 3 + 5 + \ldots + 2023) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2022)$ este egal cu:

a) 1012 b) 1011 c) 1010 d) 0

Demonstrație. De la 1 la 2024 sunt 2024 numere naturale dintre care jumătate sunt pare și jumătate impare. În prima paranteză sunt toate numerele naturale impare de la 1 la 2023, adică 1012 termeni, iar în a doua paranteză sunt toate numerele pare de la 2 la 2022, adică 1011 termeni. Bineînțeles că am putea calcula pe rând fiecare sumă din cele două paranteze, însă este mult mai rapid să grupăm convenabil termenii astfel:
$(1 + 3 + 5 + \ldots + 2023) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2022) = 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \ldots + (2023 - 2022) =$
$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{1012 ori}} = \boxed{1012}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

$\square$

Problema 5

Numărul natural $\overline{abc}$ are proprietatea că $c - a = 8$ și $c - b = 3$. Valoarea numărului natural k pentru care $k^2 = \overline{abc}$ este egală cu:

a) 18 b) 169 c) 12 d) 13

Demonstrație. Din relația $c - a = 8$ înțelegem că cifra c este cu 8 mai mare față de cifra a, care este prima cifră a unui număr natural, deci este cel puțin egală cu 1. În același timp nu poate fi mai mare decât 1 pentru că în această situație c ar depăși pe 9. Prin urmare $a = 1$, $c = 9$ și $b = 6$, iar valoarea numărului k pentru care $k^2 = 169$ este egală cu $\boxed{13}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ 5p

$\square$

Problema 6

Dacă $a + b = 17$ și $2 \cdot b + 3 \cdot c = 13$, atunci $6 \cdot a + 10 \cdot b + 6 \cdot c$ este egal cu:

a) 128 b) 64 c) 30 d) 115

Demonstrație. $a + b = 17 \iff 6 \cdot (a + b) = 6 \cdot 17 \iff 6 \cdot a + 6 \cdot b = 102$ (1). Procedăm similar și cu a doua relație și obținem $2 \cdot b + 3 \cdot c = 13 \iff 2 \cdot (2 \cdot b + 3 \cdot c) = 2 \cdot 13 \iff 4 \cdot b + 6 \cdot c = 26$ (2). Adunăm egalitățile (1) și (2) și avem ca $6 \cdot a + 10 \cdot b + 6 \cdot c = \boxed{128}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

$\square$

Problema 7

Suma numerelor naturale de trei cifre care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra sutelor și cu 3 mai mică decât cifra unităților este egală cu:

a) 810 b) 774 c) 3186 d) 2756

Demonstrație. Sunt 3 numere naturale care respectă condițiile din enunț: 147, 258, 369. Suma lor este $147 + 258 + 369 = \boxed{774}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 8

Cel mai mare număr natural de 5 cifre distincte și nenule, care are suma cifrelor egală cu 16 are produsul cifrelor egal cu:

a) 0 b) 54 c) 144 d) 36

Demonstrație. Știm că pentru a obține cel mai mare număr trebuie să alegem cea mai mare variantă posibilă pentru cifra zecilor de mii, apoi pentru cifra miilor, etc. Pentru a obține valoarea maximă pentru cifra zecilor de mii vom căuta cea mai mică sumă posibilă pentru celelalte 4 cifre. Cum cifrele sunt distincte și nenule, aceasta este $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, deci valoarea maximă pentru cifra zecilor de mii este $16 - 10 = 6$, iar numărul căutat este 64321 care are produsul cifrelor egal cu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = \boxed{144}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 9

Suma numerelor naturale care împărțite la 7 dau câtul egal cu restul este egală cu:

a) 158 b) 166 c) 168 d) 147

Demonstrație. Aplicăm teorema împărțirii cu rest și obținem $a = 7 \cdot c + r$, $r < 7$ și $c = r$, de unde $a = 7 \cdot r + r = 8 \cdot r$, $r \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Suma tuturor acestor numere este $8 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + \ldots + 8 \cdot 6 = 8 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 6) = 8 \cdot (7 \cdot 6 : 2) = \boxed{168}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 10

Produsul a trei numere naturale este 128. Fiecare factor se înjumătățește. Care este valoarea noului produs?

a) 32 b) 16 c) 64 d) 8

Demonstrație. Operația de înjumătățire este împărțirea la 2 și cum fiecare număr se împarte la 2, înseamnă că produsul celor trei numere se împarte la 8, adică valoarea noului produs este $128 : 8 = \boxed{16}$. Un exemplu de astfel de numere este 2, 4, 16.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): b) 5p

□

Problema 11

Fie numărul $\overline{122333\ldots999999999}$. Cifra de pe poziția 40 este egală cu:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

Demonstrație. Regula după care este construit numărul este următoarea: o cifră de 1, două cifre egale cu 2, trei cifre egale cu 3, etc. Știm că suma numerelor naturale de la 1 la 8 este egală cu $(1+8)\cdot 8 : 2 = 36$, deci cifra de pe locul 36 este egală cu 8 și următoarele nouă cifre sunt egale cu 9. Așadar, cifra de pe locul 40 este egală cu $\boxed{9}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): d) 5p

□

Problema 12

Sanda are de tăiat o panglică de 15 cm în bucăți mai mici. Mai întâi, în 12 secunde taie panglica în bucăți de câte 5 cm. Păstrând același ritm, Sanda taie aceste bucăți, fără a le suprapune, în bucăți de câte 1 cm fiecare. De câte secunde a mai avut nevoie Sanda în plus pentru a obține bucățile de câte 1 cm?

a) 75 b) 72 c) 60 d) 90

Demonstrație. Cu două tăieturi, din panglica de 15 cm se obțin 3 bucăți de câte 5 cm, operațiile făcându-se în 12 secunde, deci pentru o tăietură sunt necesare 6 secunde.
Pentru a obține bucăți de 1 cm dintr-o bucată de 5 cm sunt necesare 4 tăieturi $\times$ 6 secunde $=$ 24 secunde. Deoarece sunt 3 bucăți de câte 5 cm, rezultă că sunt necesare 3×24 secunde $=$ $\boxed{72 \text{ secunde}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): b) 5p

□

Problema 13

Câte numere de 5 cifre au suma dintre prima și ultima cifră egală cu 5?

a) 5000 b) 4500 c) 4000 d) 6000

Demonstrație. Un astfel de număr este de forma $\overline{abcde}$ și din $a+e=5$ deducem că perechea (a,e) poate lua una din valorile $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)$; în rest, fiecare din celelalte 3 cifre poate fi aleasă în câte 10 moduri. Folosind regula produsului, obținem $5\cdot 10^3 = \boxed{5000}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): a) 5p

□

Problema 14

Restul împărțirii numărului $a = 23^{2023} + 8\cdot 23^{2022} + 2024$ la 31 este egal cu:

a) 9 b) 16 c) 21 d) 23

Demonstrație. $a = 23^{2023} + 8 \cdot 23^{2022} + 2024 = 23^{2022} \cdot (23+8) + 2024 = 23^{2022} \cdot 31 + 31 \cdot 65 + 9 = 31 \cdot (23^{2022} + 65) + 9$. Restul împărțirii la 31 a numărului a este $\boxed{9}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 15

Într-un șir de numere naturale fiecare termen după al doilea este produsul celor doi termeni anteriori. Al șaselea termen din șir este 4000. Primul termen al șirului este egal cu:

a) 1 b) 2 c) 10 d) 5

Demonstrație. Vom nota cu a, respectiv cu b primii doi termeni ai șirului. Primii 6 termeni ai șirului sunt $a,\ b, a \cdot b,\ a \cdot b^2,\ a^2 \cdot b^3,\ a^3 \cdot b^5, \ldots$. Deci $a^3 \cdot b^5 = 4000 \iff a^3 \cdot b^5 = 2^5 \cdot 5^3$. Primul termen al șirului este $\boxed{5}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 16

Se consideră numerele

$$A = 2^{558} - 2^{557} - 2^{556},$$
$$B = 3^{336} - 2 \cdot 3^{335} - 2 \cdot 3^{334} - 3^{333},$$
$$C = 7^{224} + 9 \cdot 7^{222} - 8 \cdot 7^{223}.$$

Ordinea descrescătoare a acestor numere este:

a) $C > B > A$ b) $C > A > B$ c) $B > A > C$ d) $A > B > C$

Demonstrație.

$$\left.\begin{array}{l} A = 2^{556}(4-2-1) = 2^{556} \\ B = 3^{333}(27-18-6-1) = 2 \cdot 3^{333} \\ C = 7^{222}(49+9-56) = 2 \cdot 7^{222} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 2 \cdot 2^{555} = 2 \cdot (2^5)^{111} = 2 \cdot 32^{111} \\ B = 2 \cdot (3^3)^{111} = 2 \cdot 27^{111} \\ C = 2 \cdot (7^2)^{111} = 2 \cdot 49^{111} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2 \cdot 49^{111} > 2 \cdot 32^{111} > 2 \cdot 27^{111} \Rightarrow \boxed{C > A > B}$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problemele 1-16: . . . . $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: 20p
Total: 100p

Timp de lucru: . . . . 2 ore