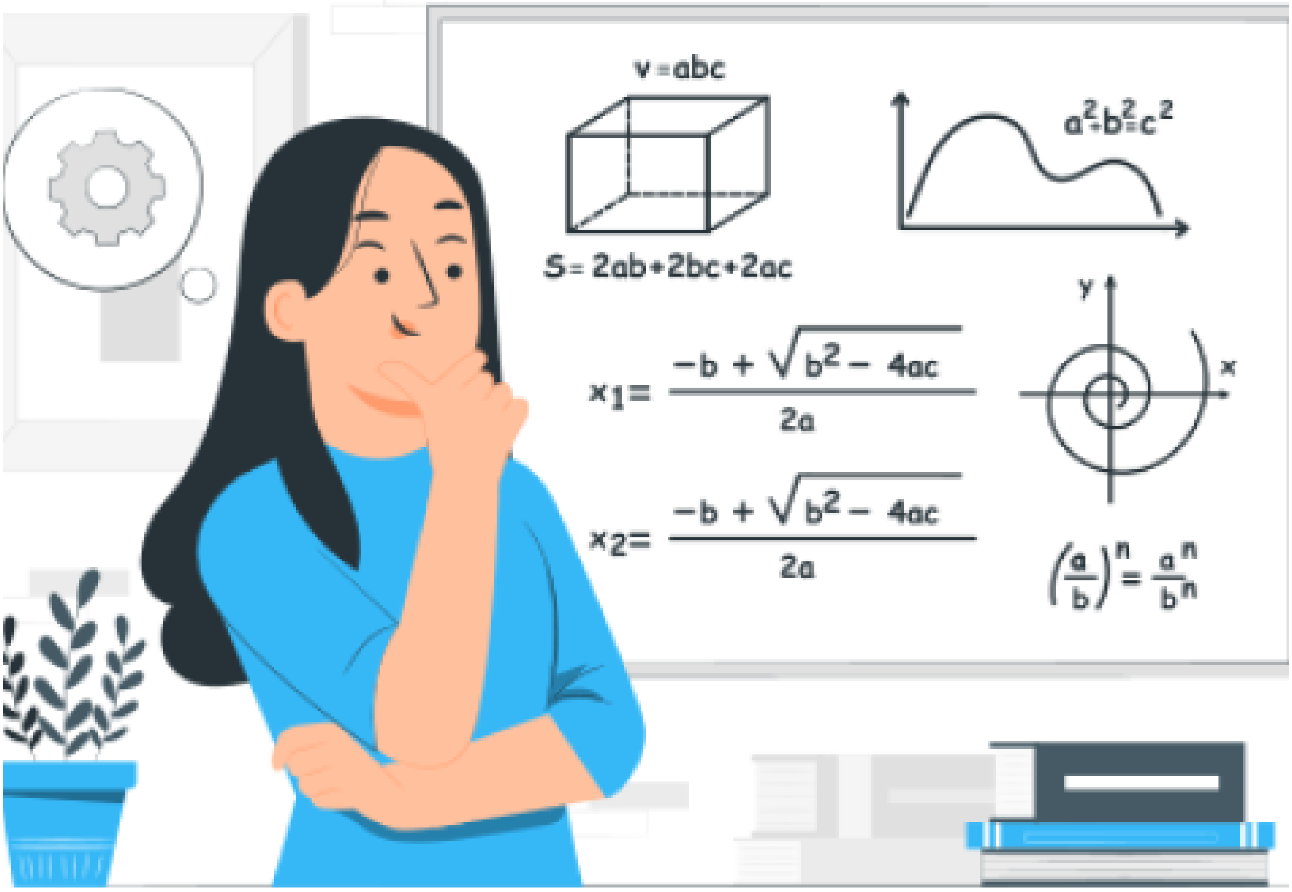


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa I
Clasa a VII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud, Bogdan Georgescu

§1 Soluții

Problema 1

Rezultatul calculului $2\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,09} + 3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,04} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{0,36}$ este egal cu:

a) $\frac{13}{10}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{21}{10}$ d) $\frac{13}{100}$

Demonstrație. $2\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,09} + 3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,04} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{0,36} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{100}} + \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{100}} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{36}{100}} =$
$= \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{10} + \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \boxed{\frac{13}{10}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

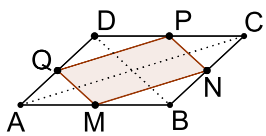
Problema 2

Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) ale unui paralelogram $ABCD$. Dacă $MNPQ$ este romb, având cel puțin un unghi ascuțit, atunci afirmația corectă este:

a) $ABCD$ este pătrat b) $AC \perp BD$

c) $ABCD$ este dreptunghi d) $ABCD$ este romb

Demonstrație. În triunghiul $\triangle ADC$ segmentul (PQ) este linie mijlocie $\implies PQ = \frac{AC}{2}$ (1).



La fel în triunghiul $\triangle BCD$, observăm că (PN) este linie mijlocie de unde $PN = \frac{BD}{2}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $(AC) \equiv (BD) \implies ABCD$ este dreptunghi. Cum $MNPQ$ are cel puțin un unghi ascuțit și unghiul determinat de dreptele AC și BD este egal cu unghiul determinat de dreptele PQ și PN (sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele) rezultă că diagonalele (AC) și (BD) nu sunt perpendiculare, deci afirmațiile $a)$, $b)$ și $d)$ nu sunt adevărate, singura corectă este $\boxed{ABCD \text{ este dreptunghi}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 3

Se consideră numerele $a = 2\sqrt{3} - 4$, $b = 5 - \sqrt{12}$ și $c = \sqrt{48}$. Care dintre următoarele numere este irațional?

a) $a + b$ b) $-a + b + c$ c) $a - b$ d) $2a - c$

Demonstrație. După ce scoatem factorii de sub radical numerele se rescriu $a = 2\sqrt{3} - 4$, $b = 5 - 2\sqrt{3}$ și $c = 4\sqrt{3}$. Obținem:

- $a + b = 2\sqrt{3} - 4 + 5 - 2\sqrt{3} = 1 \in \mathbb{Q}$
- $-a + b + c = -2\sqrt{3} + 4 + 5 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9 \in \mathbb{Q}$
- $a - b = 2\sqrt{3} - 4 - 5 + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 9 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- $2a - c = 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} = -8 \in \mathbb{Q}$.

Singurul dintre cele 4 numere care este irațional este $\boxed{a - b}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 4

Rezultatul calculului $\sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + ... + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{112}\right)}$ este număr:

a) irațional b) rațional negativ c) întreg negativ d) natural

Demonstrație.

$$\sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + ... + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{112}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{7} - 1\right) + \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{119}{784} - \frac{1}{112}\right)} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{1}{7} + \ldots \frac{1}{7}}_{112 \text{ termeni}}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4$$

care este număr $\boxed{\text{natural}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 5

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sqrt{x^2} = x$ și $\sqrt{y^2} = -y$. Rezultatul calculului $(x - |x|)^{10} + (y + |y|)^{10}$ este egal cu:

a) 0 b) 10 c) 100 d) 2023

Demonstrație. Știm că $\sqrt{a} = |a|$. Cum $\sqrt{x^2} = x \implies x \geq 0$ și $|x| = x$. Din $\sqrt{y^2} = -y \implies y \leq 0$ și $|y| = -y$. De aici obținem că $(x - |x|)^{10} + (y + |y|)^{10} = (x - x)^{10} + (y - y)^{10} = \boxed{0}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 6

Numărul natural $\overline{xy}$ este cel mai mare număr de două cifre pentru care numărul

$$N = \left(\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{a+b+c}\right) \cdot (\overline{xy} + 1)$$

este pătrat perfect. Suma cifrelor numărului $\overline{xy}$ este egală cu:

a) 1 b) 18 c) 17 d) 7

Demonstrație. $N = \left(\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{a+b+c}\right) \cdot (\overline{xy} + 1) = \left(\frac{11a + 11b + 11c}{a+b+c}\right) \cdot (\overline{xy} + 1) = 11 \cdot (\overline{xy} + 1)$, care este pătrat perfect dacă și numai dacă $\overline{xy} + 1 \in \{11,\ 44,\ 99\} \iff \overline{xy} \in \{10,\ 43,\ 98\}$. Cea mai mare valoare a lui $\overline{xy}$ este 98, iar suma cifrelor este egală cu $\boxed{17}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

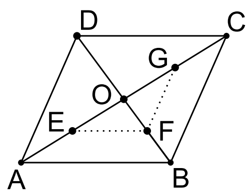
□

Problema 7

Vom nota cu O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$ și cu E, F, G mijloacele segmentelor (OA), (OB), respectiv (OC). Dacă $EF + FG = 24$ cm, atunci perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu:

a) 96 cm b) 48 cm c) 54 cm d) 192 cm

Demonstrație. Segmentul (EF) este linie mijlocie în triunghiul $\triangle OAB \implies EF = \frac{AB}{2} \iff AB = 2 \cdot EF$. Analog rezultă că $BC = 2 \cdot FG$. Astfel, $\mathcal{P}_{ABCD} = 2\,(AB + BC) = 4\,(EF + FG) = \boxed{96 \text{ cm}}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Dacă n este un număr natural de patru cifre și $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} \in \mathbb{N}$, atunci suma cifrelor numărului n este egală cu:

a) 9 b) 18 c) 27 d) 36

Demonstrație. $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}} = a \in \mathbb{N} \iff 3\sqrt{2\sqrt{n}} = a^2 \iff 3^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{n} = a^4 \iff 3^4 \cdot 2^2 \cdot n = a^8 \implies n = 3^4 \cdot 2^6 \cdot k^8 = 5184 \cdot k^8$. Cum n este număr natural de 4 cifre obținem $k = 1$ și $n = 5184$, care are suma cifrelor egală cu $5 + 1 + 8 + 4 = \boxed{18}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Se consideră numerele raționale a, b și c, astfel încât $\dfrac{a+3b}{5a+b}=\dfrac{5}{11}$ și $\dfrac{2b+c}{b+2c}=\dfrac{7}{5}$. Dacă, în plus, $a+b+3\cdot c=36$, atunci valoarea produsului $a\cdot b\cdot c$ este egală cu:

a) 486 b) 243 c) 18 d) 36

Demonstrație. $\dfrac{a+3b}{5a+b}=\dfrac{5}{11} \iff 11a+33b=25a+5b \iff 28b=14a \iff 2b=a$ (1). Din a doua proporție obținem $\dfrac{2b+c}{b+2c}=\dfrac{7}{5} \iff 10b+5c=7b+14c \iff 3b=9c \iff b=3c$ (2). Din relațiile (1) și (2) obținem $a=2b=6c \iff \dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}=c \iff a=6c$ și $b=3c$. Ultima relație din ipoteză devine $a+b+3c=36 \iff 6c+3c+3c=36 \iff c=3$. De aici $a=18$ și $b=9$, de unde $a\cdot b\cdot c=\boxed{486}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

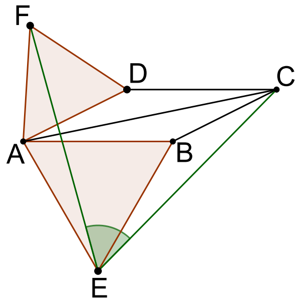
□

Problema 10

Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle BAD)<60^\circ$. În exteriorul paralelogramului construim triunghiurile echilaterale $\triangle ABE$ și $\triangle ADF$. Măsura unghiului $\angle FEC$ este egală cu:

a) 120° b) 80° c) 45° d) 60°

Demonstrație. $m(\angle FAD)+m(\angle DAB)+m(\angle BAE)=60^\circ+m(\angle DAB)+60^\circ=120^\circ+m(\angle BAD)$ (1) și cum $m(\angle BAD)<60^\circ \implies \angle FAE$ este unghiul care are în interior semidreptele $(AD$ și $(AB$. În mod similar se demonstrează că $m(\angle EBA)+m(\angle ABC)>180^\circ$, deci $\angle EBC$ este unghiul care nu conține în interior semidreptele $(BA$ și $(BD$, adică semidreapta $(EC$ este în exteriorul unghiului $\angle AEB$.



$m(\angle EBC)=360^\circ-m(\angle EBA)-m(\angle ABC)=360^\circ-60^\circ-(180^\circ-m(\angle BAD))=120^\circ+m(\angle BAD)$. (2) Din (1) și (2) obținem că $\angle FAE\equiv\angle CBE$. În plus, $(FA)\equiv(BC)$ și $(AE)\equiv(BE)$ ceea ce duce la concluzia că $\triangle FAE\equiv\triangle CBE \implies \angle AEF\equiv\angle BEC$. În cele din urmă, $m(\angle FEC)=m(\angle AEB)-m(\angle AEF)+m(\angle BEC)=\boxed{60^\circ}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 11

Valoarea absolută a numărului $a = |3^n - 5| - |7 - 3^n|$, $n \in \mathbb{N}$ este egală cu:

a) -2 b) 2 c) 0 d) 12

Demonstrație. Dacă $3^n < 5$, atunci $a = 5 - 3^n - (7 - 3^n) = 5 - 3^n - 7 + 3^n = -2$. Dacă $3^n > 7$, atunci $a = 3^n - 5 - (3^n - 7) = 3^n - 5 - 3^n + 7 = 2$. De la 5 la 7 nu mai există nicio putere a numărului 3, așa încât valorile posibile ale numărului a sunt -2 sau 2 și valoarea absolută a numărului a este egală cu $\boxed{2}$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Determinați suma numerelor $a, b \in \mathbb{Q}$ care sunt soluții ale ecuației

$$\left|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right| a + b(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (a + b)\sqrt{2} + \sqrt{192}.$$

a) 0 b) 4 c) -2 d) 2

Demonstrație. Deoarece $\left|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right| = \left|\sqrt{12} - \sqrt{18}\right| = \sqrt{18} - \sqrt{12} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, ecuația este echivalentă cu $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})a + 2b\sqrt{2} - 3b\sqrt{3} = (a + b)\sqrt{2} + 8\sqrt{3} \iff 3a\sqrt{2} - 2a\sqrt{3} + 2b\sqrt{2} - 3b\sqrt{3} = a\sqrt{2} + b\sqrt{2} + 8\sqrt{3} \iff (2a + b)\sqrt{2} = (8 + 2a + 3b)\sqrt{3}$. Deoarece a și b sunt raționale iar $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ este irațional deducem $2a + b = 8 + 2a + 3b = 0 \iff a = 2,\ b = -4$. Suma numerelor a și b este egală cu $\boxed{-2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

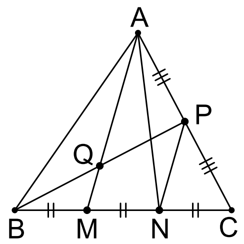
□

Problema 13

Fie triunghiul $\triangle ABC$. Pe latura (BC) se consideră punctele M și N astfel încât $BM = NC = \dfrac{BC}{3}$. Dacă punctul P este mijlocul laturii (AC) și $BP \cap AM = \{Q\}$, atunci valoarea raportului $\dfrac{MQ}{AM}$ este egală cu:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) 4

Demonstrație. Din $BM = NC = \dfrac{BC}{3}$, obținem $BM = MN = NC$. Atunci, N este mijlocul lui MC și cum P este mijlocul lui (AC), obținem că (NP) este linie mijlocie în triunghiul $\triangle AMC$, deci $PN \parallel AM$ și $PN = \dfrac{AM}{2}$, din Teorema liniei mijlocii. Cum M este mijlocul lui BN și $QM \parallel PN$, obținem din Reciproca teoremei liniei mijlocii că (MQ) este linie mijlocie în triunghiul $\triangle BNP$, deci $MQ = \dfrac{NP}{2} = \dfrac{AM}{4}$, de unde $\dfrac{MQ}{AM} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 14

Numărul perechilor de numere întregi (a, b) care sunt soluții ale ecuației $a^3 - a = 2025 \cdot b + 8$ este egal cu:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 6

Demonstrație. Numărul $a^3 - a$ este produs de trei numere întregi consecutive pentru că $a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = a \cdot (a-1) \cdot (a+1)$ și unul dintre aceste numere este divizibil cu 3, deci produsul lor este divizibil cu 3. Pe de altă parte numărul 2025 este divizibil cu 3 pentru că suma cifrelor lui este divizibilă cu 3, iar 8 este un număr de forma $\mathcal{M}_3 + 2$. Prin urmare, membrul stâng al ecuației este divizibil cu 3, iar membrul drept dă restul 2 la împărțirea prin 3. Așadar, numărul perechilor de numere întregi (a, b) care sunt soluții ale ecuației este $\boxed{0}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

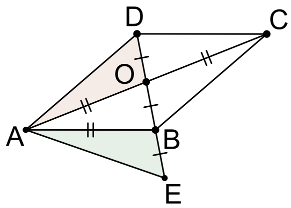
□

Problema 15

Fie paralelogramul $ABCD$ cu $3 \cdot DB = 2 \cdot DA$, $m(\angle ADB) = 60°$ și $AC = 12\sqrt{7}$ cm. Lungimea laturii (AB) este egală cu:

a) $6\sqrt{7}$ cm b) $12\sqrt{7}$ cm c) $4\sqrt{7}$ cm d) $3\sqrt{7}$ cm.

Demonstrație. Pentru că $BD = \frac{2}{3} \cdot AD$, este natural să prelungim semidreapta $(DB$ astfel încât să devină egală cu (AD). Fie $E \in (DB$, astfel încât $BE = \frac{BD}{2}$. Triunghiul $\triangle ADE$ este echilateral pentru că $(AD) \equiv (DE)$ și $m(\angle ADE) = 60°$.



Notăm cu $\{O\} = AC \cap BD \implies (BO) \equiv (DO)$. Pentru că $(AE) \equiv (AD)$, $(EB) \equiv (DO)$ și $\angle AEB \equiv \angle ADO \implies \triangle AEB \equiv \triangle ADO$ în cazul $LUL \implies (AB) \equiv (AO) \implies AB = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{7}}{2} = \boxed{6\sqrt{7}\text{ cm}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

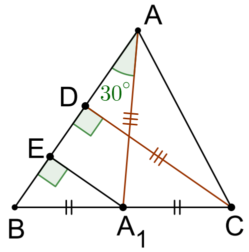
□

Problema 16

În $\triangle ABC$ ascuțitunghic, AA_1 este mediană, $A_1 \in (BC)$ și $m(\angle A_1AB) = 30°$. Fie $D \in (AB)$ astfel încât $CD = AA_1$. Măsura unghiului format de dreptele CD și AB este egală cu:

a) $60°$ b) $75°$ c) $90°$ d) $120°$

Demonstrație. Construim $A_1E \perp AB$, $E \in (AB) \implies A_1E = \dfrac{AA_1}{2}$, conform teoremei unghiului de $30°$ aplicată în triunghiul $\triangle AA_1E$.

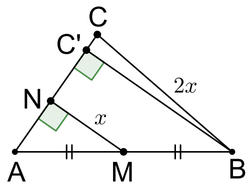


Vom demonstra că triunghiul $\triangle BCD$ este dreptunghic în D folosind o reciprocă a teoremei liniei mijlocii.

Lemă

În triunghiul $\triangle ABC$, dacă M este mijlocul lui (AB), N este un punct în interiorul segmentului (AC), astfel încât $MN \perp AC$ și $MN = \dfrac{BC}{2}$, atunci (MN) este linie mijlocie în $\triangle ABC$ și $AC \perp BC$.

Demonstrație. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că AC nu este perpendiculară pe BC și fie $BC' \perp AC$, $C' \in AC$.



Atunci $BC' \perp AC$, $MN \perp AC \implies MN \parallel BC'$. Pe de altă parte M este mijlocul lui (AB) și conform reciprocei 2 a teoremei liniei mijlocii obținem că (MN) este linie mijlocie în $\triangle ABC' \implies MN = \dfrac{BC'}{2}$. Dar și $MN = \dfrac{BC}{2} \implies BC' = BC$, adică în triunghiul dreptunghic $BC'C$ ipotenuza este egală cu o catetă, contradicție, presupunerea făcută este falsă și $BC \perp AC$. ■

Revenim la demonstrația problemei. În triunghiul $\triangle BCD$ punctul A_1 este mijlocul laturii (BC), $A_1E \perp BD$ și $A_1E = \dfrac{CD}{2}$, de unde, conform lemei demonstrată, obținem că $CD \perp AB$, deci unghiul determinat de dreptele CD și AB are măsură de $\boxed{90°}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore