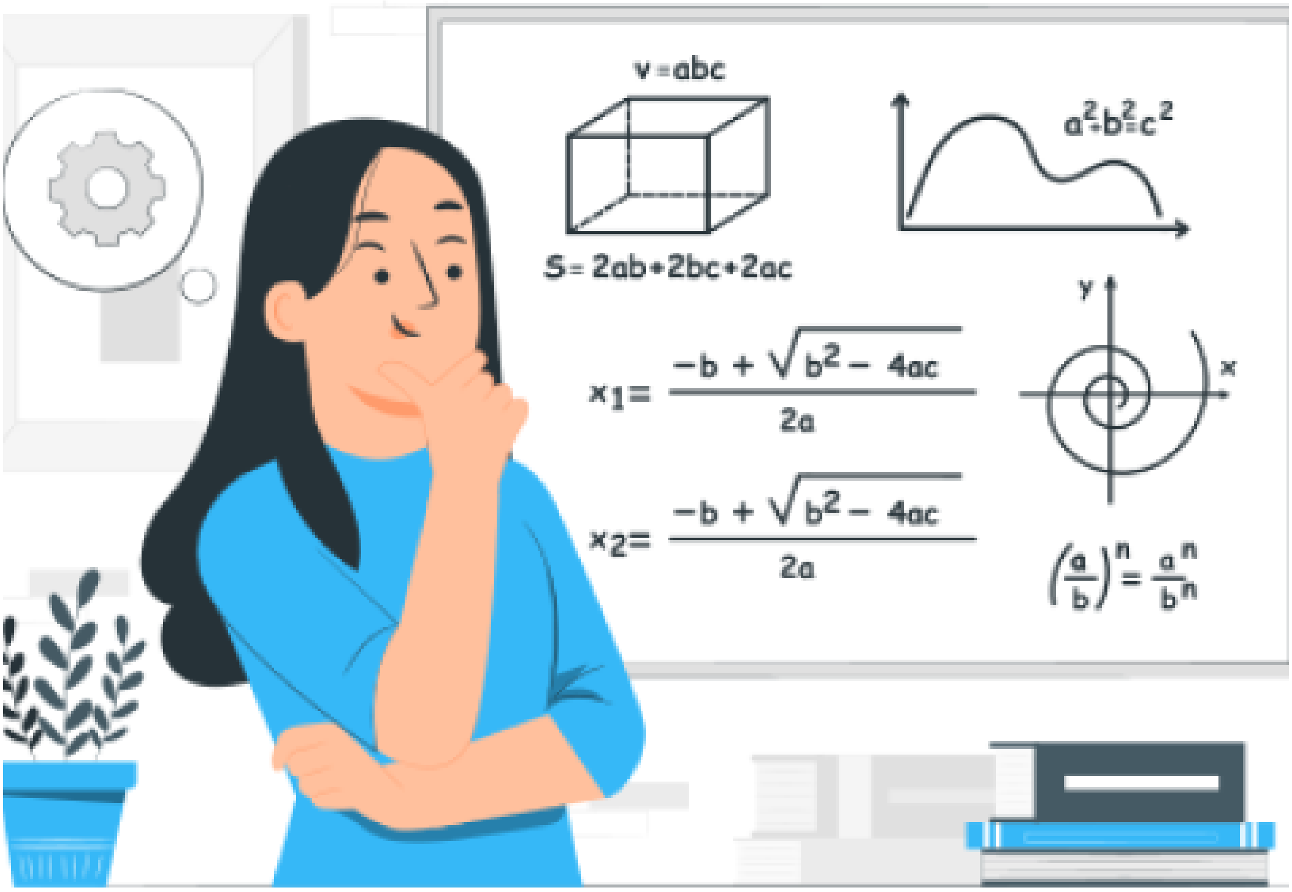


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa I
Clasa a VIII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud, Bogdan Georgescu

§1 Soluții

Problema 1

Suma numerelor reale m și n pentru care este adevărată propoziția $[m, n] \cap [m, 5] = [-1, 3]$ este egală cu:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 0

Demonstrație. Intersecția este formată din toate elementele comune mulțimilor pe care le intersectăm și cum $3 < 5 \implies n = 3$, iar $m = -1$ și suma lor este egală cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Rezultatul calculului $\left(\sqrt{6}-2\right)^2 - 2\left(\sqrt{6}-2\right)\left(2+\sqrt{6}\right) + \left(2+\sqrt{6}\right)^2$ este egal cu:

a) 6 b) $2\sqrt{6}$ c) 16 d) 4

Demonstrație. Dacă se observă că expresia pe care trebuie să o calculăm este pătratul unei diferențe, adică $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, rezolvarea este imediată și toată expresia se restrânge în $\left(\sqrt{6} - 2 - 2 - \sqrt{6}\right)^2 = (-4)^2 = \boxed{16}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care are sens expresia $\dfrac{3}{\sqrt{3x-11}}$ este:

a) $\left[\dfrac{11}{3}, +\infty\right)$ b) $\left(\dfrac{11}{3}, +\infty\right)$ c) $\left(\dfrac{3}{11}, +\infty\right)$ d) $\left(-\infty, \dfrac{11}{3}\right)$

Demonstrație. Expresia $\dfrac{3}{\sqrt{3x-11}}$ are sens atâta vreme cât sunt definite radicalul și fracția, adică $3x - 11 > 0 \iff 3x > 11 \iff x > \dfrac{11}{3}$. Expresia are sens pentru valorile reale ale lui x din intervalul $\boxed{\left(\dfrac{11}{3}, +\infty\right).}$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

Cea mai mică valoare a numărului real m pentru care numărul $x = 4 - \sqrt{3}$ este soluție a ecuației $m - x = \dfrac{-3}{m+x}$ este egală cu:

a) $-2+\sqrt{3}$ b) $-2\sqrt{3}+2$ c) $-2-\sqrt{3}$ d) $-2-2\sqrt{3}$

Demonstrație. $m - x = \dfrac{-3}{m+x} \iff (m-x)(m+x) = -3 \iff m^2 - x^2 = -3$. Deoarece $x = 4-\sqrt{3}$ este soluție a ecuației, obținem $m^2 - (4-\sqrt{3})^2 = -3 \iff m^2 = 16 - 8\sqrt{3} + 3 - 3 \iff m^2 = 16 - 8\sqrt{3} \iff m^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 + 2^2 \iff m^2 = \left(2\sqrt{3}-2\right)^2 \iff m = 2\sqrt{3} - 2$ sau $m = -2\sqrt{3} + 2$. Cea mai mică valoare a numărului real m este egală cu $\boxed{-2\sqrt{3}+2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 5

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a + b = 2024$ și $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2024$, atunci valoarea expresiei $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2}$ este egală cu:

a) 2024 b) 2024^2 c) $2024^2 - 1$ d) $2024^2 - 2$

Demonstrație. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 2024 \iff \dfrac{a+b}{ab} = 2024 \iff ab = 1$. Pe de altă parte $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2024^2 - 2$. În final obținem

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2} = \sqrt{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2} = \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a^2+b^2}{ab}\right| = \boxed{2024^2 - 2}$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

Se consideră numerele $a = \sqrt{2^{2024} - 2^{1013} + 2^{1014} + 1}$ și $b = \sqrt{2^{2024} + 2^{1013} - 2^{1014} + 1}$. Valoarea expresiei $a - b$ este egală cu:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Demonstrație.

- $a = \sqrt{2^{2024} - 2^{1013}(1-2) + 1} = \sqrt{(2^{1012})^2 + 2^{1013} + 1} = \sqrt{(2^{1012})^2 + 2\cdot 2^{1012} + 1} = \\ = \sqrt{(2^{1012}+1)^2} = 2^{1012} + 1$
- $b = \sqrt{(2^{1012})^2 + 2^{1013}(1-2) + 1} = \sqrt{(2^{1012})^2 - 2\cdot 2^{1012} + 1} = \sqrt{(2^{1012}-1)^2} = 2^{1012} - 1$

Atunci, $a - b = 2^{1012} + 1 - 2^{1012} + 1 \implies \boxed{a - b = 2}$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Dacă $x \in \mathbb{R}^*$ și $x - \dfrac{1}{3x} = 3$, atunci expresia $x^2 + \dfrac{1}{9x^2}$ are valoarea egală cu:

a) $\dfrac{11}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) 9 d) $\dfrac{29}{3}$

Demonstrație. Ridicăm la pătrat egalitatea din ipoteză și obținem $x - \frac{1}{3x} = 3 \iff x^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9x^2} = 9 \iff x^2 + \frac{1}{9x^2} = 9 + \frac{2}{3} \iff x^2 + \frac{1}{9x^2} = \boxed{\frac{29}{3}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Fie numerele naturale nenule x și y pentru care $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0,(3)$. Numărul perechilor (x, y) care sunt soluții ale ecuației este egal cu:

a) 4 b) 2 c) 3 d) 0

Demonstrație. Ecuația este echivalentă cu $y - 2x = \frac{xy}{3}$ sau $xy + 6x - 3y = 0$ sau $(3 - x)(y + 6) = 18$. Cum $y \in \mathbb{N} \implies y + 3 > 0$, deci și $3 - x > 0$. Deoarece x este un număr natural nenul obținem $x \in \{1, 2\}$.

- $x = 1 \implies y + 6 = 9 \iff y = 3$;
- $x = 2 \implies y + 6 = 18 \iff y = 12$.

În concluzie, $(x, y) \in \{(1, 3),\ (2, 12)\}$. Numărul perechilor (x, y) care sunt soluții ale ecuației este egal cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Dacă $a, b \in \mathbb{R},\ a + b < 4$ și $ab + 4 > 2a + 2b$, atunci afirmația adevărată este:

a) $a < 2,\ b < 2$; b) $a < 2,\ b > 2$; c) $a > 2,\ b < 2$; d) $a > 2,\ b > 2$.

Demonstrație. $ab + 4 > 2a + 2b \iff b(a - 2) - 2(a - 2) > 0 \iff (a - 2)(b - 2) > 0$, adică cei doi factori ai produsului au același semn. Dacă $a > 2$ și $b > 2$, atunci $a + b > 4$, contradicție cu ipoteza, deci varianta corectă este $\boxed{a < 2,\ b < 2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Lungimile laturilor triunghiului $\triangle ABC$ se notează cu $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$. Știm că acestea verifică inegalitatea

$$\sqrt{a^2 - 4a + 13} + \sqrt{b^2 - 2b\sqrt{3} + 19} + \sqrt{c^2 - 2c + 26} \leq 12.$$

Măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu:

a) $90°$ b) $60°$ c) $45°$ d) $30°$

Demonstrație. Formăm o sumă de pătrate sub fiecare radical

$$\sqrt{a^2-4a+13}+\sqrt{b^2-2\sqrt{3}b+19}+\sqrt{c^2-2c+26}=$$
$$\sqrt{(a-2)^2+9}+\sqrt{(b-\sqrt{3})^2+16}+\sqrt{(c-1)^2+25}\geq$$
$$\geq 3+4+5=12$$

Însă, din ipoteză știm că $\sqrt{a^2-4a+13}+\sqrt{b^2-2\sqrt{3}b+19}+\sqrt{c^2-2c+26}\leq 12$, așadar are loc cazul de egalitate care se întâmplă pentru $a=2$, $b=\sqrt{3}$ și $c=1$. Cum $b^2+c^2=a^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A și măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu $\boxed{90^\circ}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 11

Numărul perechilor de numere naturale (x,y) care sunt soluții ale ecuației

$$x^2y+xy^2+3xy-4x-4y-12=0$$

este egal cu:

a) 0 b) 4 c) 1 d) 3

Demonstrație. Perechea de numere reale (x,y) este soluție a ecuației $x^2y+xy^2+3xy-4x-4y-12=0 \iff xy(x+y+3)-4(x+y+3)=0 \iff (x+y+3)(xy-4)=0 \iff x+y+3=0$ sau $xy=4$. Prima ecuație nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, iar din a doua obținem $(x,y)\in\{(1,4),\ (2,2),\ (4,1)\}$, deci numărul perechilor (x,y) care sunt soluții ale ecuației este egal cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

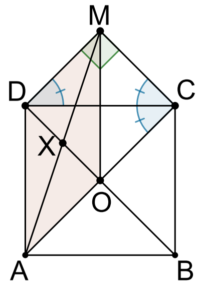
□

Problema 12

Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura $AB=4$ cm și M un punct exterior pătratului astfel încât $\triangle MDC$ să fie un triunghi dreptunghic isoscel cu $m(\angle DMC)=90^\circ$. Dacă $BD\cap AM=\{X\}$, atunci lungimea segmentului (XD) este egală cu:

a) 1 cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) $\sqrt{2}$ cm d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm

Demonstrație. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic isoscel $\triangle DMC$ și obținem $DM^2+CM^2=DC^2 \iff 2\cdot DM^2=16 \iff DM=2\sqrt{2}$.
Notăm $AC\cap BD=\{O\}$. AC este diagonala pătratului cu latura de 4 cm $\implies AC=4\sqrt{2}$ și $AO=\dfrac{AC}{2}=2\sqrt{2}$, adică $AO=DM$. Dar $m(\angle MDC)=m(\angle ACD)=45^\circ$ și sunt unghiuri alterne interne $\implies DM\parallel AC$. Așadar, din $\left.\begin{matrix} DM\parallel AO \\ DM=AO\end{matrix}\right\}\implies DMOA$ paralelogram $\implies XD=\dfrac{DO}{2}=\dfrac{DB}{4}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\boxed{\sqrt{2}\text{ cm}}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ 5p

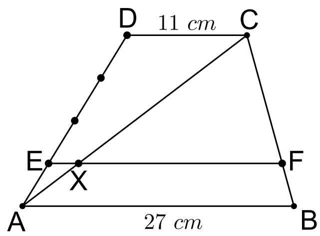
□

Problema 13

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 27$ cm și $CD = 11$ cm. Pe laturile (AD), respectiv BC se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $EF \parallel AB$. Dacă $\dfrac{DE}{AE} = 3$, atunci lungimea segmentului EF este egală cu:

a) 23 cm   b) 32 cm   c) 54 cm   d) 22 cm

Demonstrație. Notăm $AC \cap EF = \{X\}$.



Din $EX \parallel DC$ (conform TFA) $\implies \triangle AEX \sim \triangle ADC$. Obținem:

$$\frac{EX}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{4} \iff EX = \frac{11}{4} \text{ cm}.$$

Tot din $EX \parallel DC$ (conform teoremei lui Thales) obținem:

$$\frac{DE}{EA} = \frac{CX}{XA} \iff \frac{CX}{XA} = \frac{3}{1} \iff \frac{CX}{CA} = \frac{3}{4}.$$

Din $XF \parallel AB$ (conform TFA) $\implies \triangle CXF \sim \triangle CAB$. Obținem:

$$\frac{XF}{AB} = \frac{CX}{CA} = \frac{3}{4} \iff XF = \frac{27 \cdot 3}{4} = \frac{81}{4} \text{ cm}.$$

În final $EF = EX + XF \iff EF = \dfrac{11}{4} + \dfrac{81}{4} = \dfrac{92}{4} = \boxed{23 \text{ cm}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{a)}}$ 5p

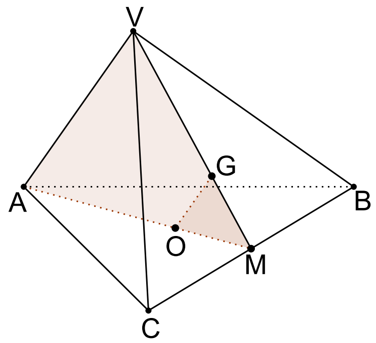
□

Problema 14

În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful în V, se notează cu O centrul de greutate al bazei și cu G centrul de greutate al triunghiului $\triangle VBC$. Dacă M este mijlocul laturii (BC), atunci raportul ariilor triunghiurilor $\triangle MOG$ și $\triangle MAV$ este egal cu:

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{9}$ d) $\dfrac{1}{81}$

Demonstrație. G este centrul de greutate în $\triangle VBC \implies \dfrac{MG}{MV} = \dfrac{1}{3}$. În același mod obținem că $\dfrac{MO}{MA} = \dfrac{1}{3}$, deci $\dfrac{MG}{GV} = \dfrac{MO}{OA} \implies GO \parallel AV \implies \triangle MOG \sim \triangle MAV \implies \dfrac{\mathcal{A}_{MOG}}{\mathcal{A}_{MAV}} = = \left(\dfrac{MO}{MA}\right)^2 = \boxed{\dfrac{1}{9}}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

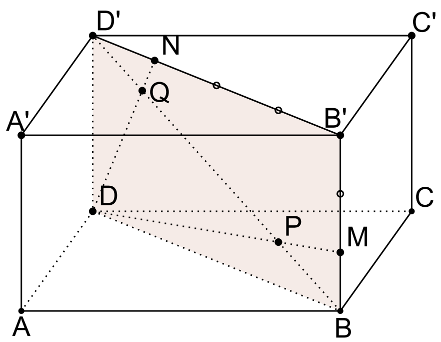
$\square$

Problema 15

$ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic. $M \in BB'$ astfel încât $BB' = 3 \cdot BM$, iar $N \in D'B'$ astfel încât $D'B' = 4 \cdot D'N$. Notăm $DN \cap BD' = \{Q\}$ și $DM \cap BD' = \{P\}$. Atunci raportul $\dfrac{QP}{D'B}$ este egal cu:

a) $\dfrac{13}{20}$ b) $\dfrac{7}{20}$ c) $\dfrac{11}{20}$ d) $\dfrac{17}{20}$

Demonstrație. Cum $BB' \parallel DD'$ și $BB' = DD' \implies BDD'B'$ este paralelogram.



Toată problema se restrânge în paralelogramul $BDD'B'$, adică problema este de geometrie plană.

- $D'B' \parallel DB \implies \triangle QND' \sim \triangle QDB \implies \dfrac{D'Q}{QB} = \dfrac{D'N}{DB} \iff \dfrac{D'Q}{QB} = \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{D'Q}{D'B} = = \dfrac{1}{5} \iff D'Q = \dfrac{1}{5} \cdot D'B$ (1).
- $BB' \parallel DD' \implies \triangle PMB \sim \triangle PDD' \implies \dfrac{BP}{PD'} = \dfrac{BM}{DD'} \iff \dfrac{BP}{PD'} = \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{BP}{D'B} = = \dfrac{1}{4} \iff BP = \dfrac{1}{4} \cdot D'B$ (2).

Din relațiile (1) și (2) obținem $QP = BD' - BP - D'Q = BD' - \frac{1}{4} \cdot BD' - \frac{1}{5} \cdot BD' = \frac{11}{20} \cdot BD'$.

Valoarea raportului $\frac{QP}{D'B}$ este egală cu $\boxed{\frac{11}{20}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

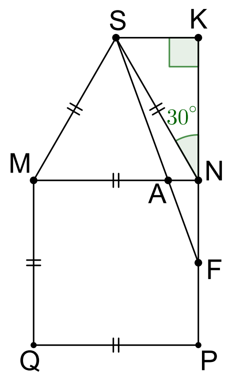
□

Problema 16

Considerăm o piramidă patrulateră regulată $SMNPQ$ de vârf S, având toate muchiile de lungime 1. O furnică pornește din S, se deplasează pe fața SMN, atinge muchia $[MN]$ într-un punct A, iar apoi se deplasează pe baza $MNPQ$ până ajunge în punctul F, mijlocul muchiei $[NP]$. Știind că drumul parcurs de furnică din S până în F este drumul de lungime minimă, lungimea segmentului (NA) este egală cu:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Demonstrație. Facem desfășurarea fețelor $MNPQ$ și SMN. Drumul minim se realizează când S, A, F sunt coliniare.



Fie K piciorul perpendicularei din S pe NP. $MN \perp NP$, $SK \perp NP \implies MN \parallel SK \implies m(\angle NSK) = m(\angle SNM) = 60°$ ca unghiuri alterne interne și $m(\angle SNK) = 30°$. Conform teoremei unghiului de 30° aplicată în $\triangle SNK$ obținem $SK = \frac{SN}{2} = \frac{1}{2}$ și aplicând teorema lui Pitagora avem $NK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. În continuare $KF = KN + NF = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Cum $NA \parallel SK \implies \triangle FNA \sim \triangle FKS$ (teorema fundamentală a asemănării), de unde $\frac{NA}{SK} = \frac{FN}{FK} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \iff$ $NA = \frac{1}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore