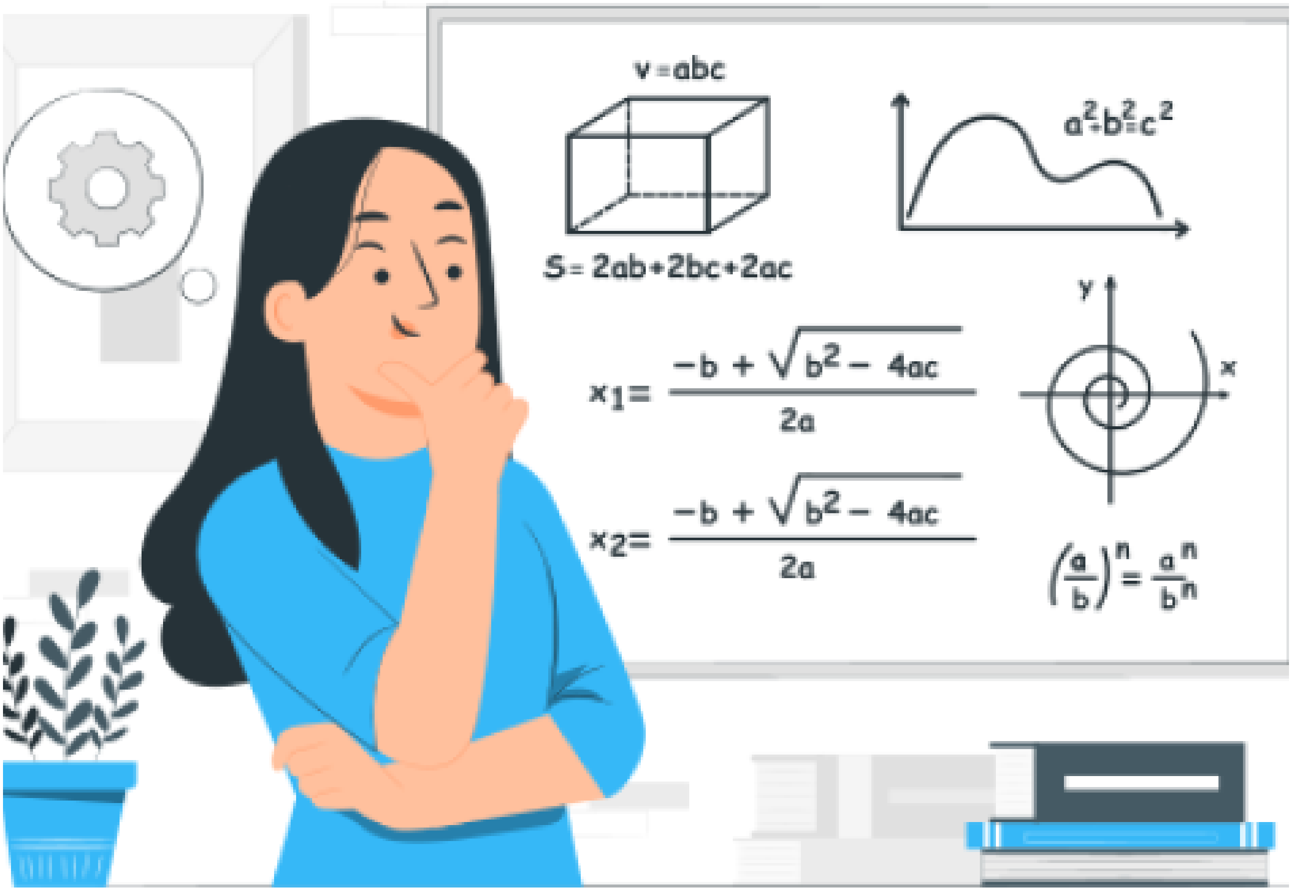

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa II
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Într-un șir de 15 numere naturale consecutive, termenul din mijloc este 2024. Aflați suma dintre cel mai mic și cel mai mare termen al șirului.

Demonstrație. În fața numărului 2024 se află $(15-1):2=7$ numere, după 2024 se mai găsesc încă 7 numere. Numărul mai mic este $2024-7=2017$, iar numărul mai mare este $2024+7=2031$. Suma acestor două numere este $2017+2031=\boxed{4048}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{4048}$ .... $5p$

□

Problema 2

Se consideră numărul $a=2^{2024}-2^{2018}-2^{2017}$. Care este valoarea numărului determinat de ultimele patru cifre ale numărului a?

Demonstrație. $a=2^{2024}-2^{2018}-2^{2017}=2^{2017}\cdot(2^7-2-1)=2^{2017}\cdot 125=2^{2014}\cdot 2^3\cdot 5^3=2^{2014}\cdot 1000$. Ultimele trei cifre sunt egale cu 0, iar a patra cifră în ordine inversă este 4 pentru că ultima cifră a puterilor lui 2 se repetă din 4 în 4, iar $\mathcal{U}\left(2^{2014}\right)=\mathcal{U}\left(2^{4\cdot 503+2}\right)=\mathcal{U}\left(2^2\right)=4$. Numărul format din ultimele patru cifre ale numărului a este $\boxed{4000}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{4000}$ .... $5p$

□

Problema 3

Ana, Bianca și Cristina au fiecare câte 617 lei. După ce fiecare dintre cele 3 fete a cheltuit o parte din bani, au observat că sumele care le-au rămas sunt 3 numere consecutive, Ana are cel mai puțin și Cristina cel mai mult, iar toate 3 au acum la un loc tot atâția bani cât a cheltuit Cristina. Ce sumă de bani a cheltuit Ana?

Demonstrație. Vom nota cu a suma de bani cu care a rămas Ana. Înseamnă că Bianca are $a+1$ lei și Cristina are $a+2$ lei. Cele 3 fete au împreună $a+a+1+a+2=3\cdot a+3$ lei. Cristina are acum $a+2$ lei, înseamnă că a cheltuit $617-(a+2)$ lei. Din egalitatea celor două sume obținem $3\cdot a+3=617-(a+2)$. Adunăm $a+2$ în ambii membri ai egalității și obținem $a+2+3\cdot a+3=a+2+617-(a+2) \iff 4\cdot a+5=617 \iff 4\cdot a=612 \iff a=612:4 \iff a=153$. Acest număr reprezintă banii pe care îi mai are Ana și suma pe care a cheltuit-o Ana este $617-153=\boxed{464}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{464}$ .... $5p$

□

Problema 4

Determinați numărul natural $\overline{abc}$ pentru care există numărul natural n, astfel încât să aibă loc egalitatea

$$3+3^2+3^3+\ldots+3^n+\overline{abc}=2024.$$

Demonstrație. Vom calcula suma primelor puteri ale lui 3 până când aceasta depășește numărul 2024. Acest lucru nu este dificil de făcut atâta vreme cât știm că $3^6 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ și $3^7 > 700 \cdot 3 = 2100 > 2024$. Pe de altă parte, $3+3^2+3^3+3^4+3^5 = 3+9+27+81+243 = 363$, adică această sumă este prea mică pentru că $3+3^2+3^3+3^4+3^5+\overline{abc} \leq 363+999 = 1362 < 2024$. Singurul număr natural n pentru care există un număr de trei cifre $\overline{abc}$ care să fie soluție a ecuației din ipoteză este $n = 6$. Ecuația devine astfel $3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+\overline{abc} = 2024 \iff 1092+\overline{abc} = 2024 \iff \boxed{\overline{abc} = 932}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{932}$ .... $5p$

□

Problema 5

Fie șirul de numere $10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22, \ldots$. Aflați care este termenul de pe poziția 100 din acest șir.

Demonstrație. Numerele din șir se pot grupa câte trei, după cum se poate vedea în tabelul de mai jos.

$10 = 4 \cdot 2 + 2$	$11 = 4 \cdot 2 + 3$	$12 = 4 \cdot 2 + 4$
$14 = 4 \cdot 3 + 2$	$15 = 4 \cdot 3 + 3$	$16 = 4 \cdot 3 + 4$
$18 = 4 \cdot 4 + 2$	$19 = 4 \cdot 4 + 3$	$20 = 4 \cdot 4 + 4$
...	...	...

Pe fiecare coloană numerele dau același rest la împărțirea prin 4, numerele de pe ultima coloană dau restul 0. Pe fiecare linie sunt 3 numere, deci primele 100 de numere ocupă 33 de linii complete și al $100-$lea termen din șir este primul număr de pe linia 34. Numerele de pe prima coloană dau restul 2 la împărțirea prin 4. Numărul de pe linia 1 dă câtul 2 la împărțirea prin 4, numărul de pe linia 2 dă câtul 3 la împărțirea prin 4, numărul de pe linia 3 dă câtul 4 la împărțirea prin $4, \ldots$, numărul de pe linia 34 dă câtul 35 la împărțirea prin 4 (câtul este cu 1 mai mare față de numărul liniei). Al $100-$lea număr din șir este $4 \cdot 35 + 2 = 140 + 2 = \boxed{142}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{142}$ .... $5p$

□

Problema 6

Suma a două numere naturale nenule este de 7 ori diferența lor. Dacă produsul lor este de 36 de ori diferența, aflați valoarea produsului acestor două numere.

Demonstrație. Fie a și b cele două numere cu $a > b$. Atunci avem:

- $a + b = 7(a - b)$
- $a \cdot b = 36(a - b)$

Din prima relație obținem $a + b = 7 \cdot a - 7 \cdot b \iff 6 \cdot a = 8 \cdot b \iff 3 \cdot a = 4 \cdot b$.
Înmulțim a doua egalitate cu 3 și obținem $36 \cdot (3 \cdot a - 3 \cdot b) = 3 \cdot a \cdot b$ și vom înlocui $3 \cdot a$ cu $4 \cdot b$. Obținem astfel $36 \cdot (4 \cdot b - 3 \cdot b) = 4 \cdot b \cdot b \iff 36 \cdot b = 4 \cdot b \cdot b$. Pentru că b este nenul împărțim relația prin b și aceasta se transformă în $36 = 4 \cdot b \iff b = 9$ și $a = 12$. Produsul celor două numere este $a \cdot b = 12 \cdot 9 = \boxed{108}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{108}$ .... $5p$

□

Problema 7

Un autobuz pleacă de la capătul liniei cu toate scaunele pentru călători ocupate și fără călători în picioare. La prima stație coboară 6 persoane și urcă 4, la a doua stație coboară jumătate din numărul de călători și urcă 6 persoane iar la ultima stație, coboară 8 persoane și urcă 6, autobuzul ajungând la destinația finală cu un număr de 25 de călători. Câți călători erau în autobuz când acesta a plecat de la capătul liniei?

Demonstrație. Vom folosi metoda mersului invers.

- Cum la stația finală au ajuns 25 de călători, înseamnă că la plecarea din a treia stație erau 25 de călători.
- În a treia stație au coborât 8 și au urcat 6, deci numărul lor s-a micșorat cu 2 față de câți erau la intrare în a treia stație. Prin urmare, la intrarea în a treia stație erau $25 + 2 = 27$ de călători.
- La plecarea din a doua stație erau 27 de călători, aici au urcat 6, adică înainte de a urca cele 6 persoane în autobuz erau $27 - 6 = 21$ de persoane. Tot aici au coborât jumătate din numărul celor care au intrat în stația a doua. Pentru că au rămas 21, înseamnă că la intrare în a doua stație erau $21 \cdot 2 = 42$ de călători.
- În prima stație au coborât 6 și au urcat 4, deci numărul lor s-a micșorat cu 2 față de câți erau la intrare în prima stație. Prin urmare, la intrarea în prima stație erau $42 + 2 = 44$ de călători.

Numărul călătorilor care au plecat de la capătul liniei este $\boxed{44}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{44}$ 5*p*

□

Problema 8

Calculăm suma a cinci numere naturale consecutive în care cel mai mic dintre ele este a^{10}, unde a este număr natural impar. Care este ultima cifră a sumei calculată?

Demonstrație. Suma calculată este $a^{10} + a^{10} + 1 + a^{10} + 2 + a^{10} + 3 + a^{10} + 4 = 5 \cdot a^{10} + 10$. Cum a este număr impar, rezultă că și a^{10} este număr impar, deci $5 \cdot a^{10}$ are ultima cifră 5. Prin urmare, ultima cifră a sumei este $5 + 0 = \boxed{5}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{5}$ 5*p*

□

Problema 9

Tabelul cu numere, de mai jos, se repetă la infinit după o anumită regulă. Pe ce rând se află numărul 1030?

2 3

4 5 6

8 9 10 11

16 17 18 19 20

....

Demonstrație. Observăm că:

- Rândurile încep cu 2, 2^2, 2^3 etc. Deci la începutul fiecărui rând este puterea lui 2 la exponentul pe care îl indică numărul rândului. De exemplu, rândul 9 începe cu $2^9 = 512$, rândul 10 începe cu $2^{10} = 512 \times 2 = 1024$.
- Rândul 1 are pe orizontală două numere consecutive în ordine crescătoare, rândul 2 are pe orizontală 3 numere consecutive în ordine crescătoare, deci rândul 10 are pe orizontală 11 numere consecutive în ordine crescătoare: 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034

Numărul 1030 este pe rândul $\boxed{10}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{10}$ 5*p*

□

Problema 10

Într-o pauză, Ana și Costel s-au jucat scriind pe tablă un șir de numere. Costel a scris cifra 1, Ana a scris două cifre de 2, apoi Costel a scris 3 cifre de 3, Ana a mai scris 4 de 4 și tot așa. Când a intrat profesorul în clasă, pe tablă era scris numărul

$$N = 122333444455555\ldots \underbrace{1515\ldots1515}_{\text{de 15 ori numărul 15}}.$$

Câte cifre are numărul N?

Demonstrație. Pe primele poziții, mai precis, de la 1 până la ultimul 9 inclusiv, șirul conține numere formate dintr-o singură cifră. De la 10 până la ultimul 15 inclusiv, numerele sunt de două cifre.

- Numărul de cifre care s-au scris pe tablă cu ajutorul numerelor de o cifră este $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.
- Numărul de cifre care s-au scris pe tablă cu ajutorul numerelor de două cifre este $2 \cdot (10+11+12+13+14+15) = 2 \cdot 75 = 150$.

Numărul total al cifrelor numărului N este $45 + 150 = \boxed{195}$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{195}$ 5*p*

□

Problema 11

Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ și $2^a + 2^b + 2^c = 4^{25}$ atunci valoarea sumei $a + b + c$ este egală cu:

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea problemei vom alege ca $a \leq b \leq c$.

- dacă $a < b$, atunci vom da factor comun pe 2^a și ecuația devine $2^a \cdot \left(1 + 2^{b-a} + 2^{c-a}\right) = 2^{50}$, unde $b - a \neq 0$ și $c - a \neq 0$. Factorul din paranteză este impar, deci ecuația nu are soluție în acest caz;
- dacă $a = b < c$, ecuația se rescrie $2^{a+1} + 2^c = 2^{50} \iff 2^{a+1} \cdot (1 + 2^{a+1-c}) = 2^{50}$. Dacă $a + 1 \neq c$, atunci factorul din paranteză este impar și nu avem soluții, prin urmare este necesar ca $c = a + 1$ și ecuația se rescrie astfel $2^{a+1} + 2^{a+1} = 2^{50} \iff 2^{a+2} = 2^{50} \iff a + 2 = 50 \iff a = 48$.

- dacă $a = b = c$, atunci ecuația se rescrie $2^a + 2^a + 2^a = 2^{50} \iff 3 \cdot 2^a = 2^{50}$, evident fără soluție.

Soluția unică a ecuației este $a = 48$, $b = 48$ și $c = 49$, iar suma lor este egală cu $a + b + c = 48 + 48 + 49 = \boxed{145}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{145}$ 5p

□

Problema 12

Dacă a, b, c sunt numere naturale care verifică relația

$$4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bb}\right) = 1171 - 243 \cdot 2^c,$$

atunci valoarea produsului $a \cdot b$ este egală cu:

Demonstrație. Cum $4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bb}\right)$ este număr par obținem că și $1171 - 243 \cdot 2^c$ este număr par. Dar 1171 este număr impar, deci 2^c este număr impar, lucru care se întâmplă dacă și numai dacă $c = 0$. Ecuația se rescrie $4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bb}\right) = 1171 - 243 \iff 4 \cdot \left(2^{2a} \cdot 3^a + \overline{bb}\right) = 928$. După simplificarea cu 4 rezultă $4^a \cdot 3^a + \overline{bb} = 232 \implies 12^a + \overline{bb} = 232$. Cum $12^a \leq 232$, rezultă $a \leq 2$. În același timp $\overline{bb} \leq 99 \implies 12^a \geq 232 - 99 = 133$, de unde obținem valoarea unică pentru $a = 2$. Înlocuim în ecuație și obținem $144 + \overline{bb} = 232 \iff \overline{bb} = 88$, deci $b = 8$, iar produsul numerelor a și b este $a \cdot b = 2 \cdot 8 = \boxed{16}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{16}$ 5p

□

Problema 13

Știind că $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ sunt numere naturale, aflați restul împărțirii la 5 a numărului

$$n = 9^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2024}+a_{2025})(a_{2025}+a_1)} - 1$$

Demonstrație. Pentru că $(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2024} + a_{2025}) + (a_{2025} + a_1) = 2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2025})$ este un număr par obținem că cel puțin unul dintre numerele $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3, \ldots$, $a_{2025} + a_1$ este număr par, altfel prima sumă ar fi o sumă de 2025 numere impare și ar fi număr impar. Ultima cifră pentru puterile lui 9 este 1 pentru exponent par și 9 pentru exponent impar, deci $\mathcal{U}\left(9^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{2024}+a_{2025})(a_{2025}+a_1)} - 1\right) = 1 - 1 = 0$, adică numărul n este divizibil cu 5, deci restul împărțirii la 5 este $\boxed{0}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{0}$ 5p

□

Problema 14

Pe masă sunt 6 cartonașe pe care sunt scrise numerele $1, 9, 12, 13, 17, 49$. Ana împreună cu Heidi ridică 5 cartonașe, așa că pe masă rămâne un singur cartonaș. Dacă suma numerelor alese de Ana este de 5 ori mai mare decât suma numerelor alese de Heidi, numărul scris pe cartonașul rămas pe masă este egal cu:

Demonstrație. Suma numerelor de pe cele 6 cartonașe este $1 + 9 + 12 + 13 + 17 + 49 = 101$. Suma numerelor de pe cartonașele extrase de Ana și Heidi este un număr care se împarte exact la 6 și cum $101 = 6 \times 16 + 5$ obținem că numărul de pe cartonașul rămas pe masă dă restul 5 la împărțirea cu 6, iar dintre cele 6 numere singurul care verifică acest lucru este 17. Rămâne să mai verificăm dacă este posibil ca suma numerelor de pe cartonașele extrase de Ana să fie de 5 ori mai mare decât cea a numerelor extrase de Heidi. Ana a extras numerele $9,\ 12,\ 49$, cu suma 70, Heidi numerele 1 și 13 cu suma 14, iar $70 = 5 \times 14$, așadar numărul de pe cartonașul rămas pe masă este $\boxed{17}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{17}$ 5p

□

Problema 15

Fiecare număr natural nenul poate fi exprimat ca sumă de puteri distincte ale lui 2. De exemplu, numărul 131 poate fi scris ca $2^7 + 2^1 + 2^0$. Aflați câte numere naturale de trei cifre se pot scrie ca sumă de exact 9 puteri distincte ale lui 2.

Demonstrație. Suma primelor zece puteri este $2^9 + 2^8 + ... + 2^0 = 1023$. Ca să fie sumă de nouă puteri, trebuie să omitem exact una din ele. Pe lângă asta, termenul omis trebuie să fie suficient de mare astfel încât suma să fie cel mult 999, adică $2^x \geq 24$, fapt care ar implica $x \geq 5$. Atunci $x \in \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$. Numerele de trei cifre care se pot scrie ca suma de exact 9 puteri distincte ale lui 2 sunt

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^9,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^9,$$
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8.$$

În concluzie, avem $\boxed{5}$ soluții.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{5}$ 5p

□

Problema 16

Pentru câte numere naturale de 4 cifre $\overline{abcd}$ expresia $a \cdot b + c \cdot d$ este număr par?

Demonstrație. Vom folosi metoda numărării cazurilor complementare, adică vom număra pentru câte dintre numerele de 4 cifre expresia $a \cdot b + c \cdot d$ este impară. Acest lucru se întâmplă când unul dintre termeni este par și celălalt este impar. Vom nota cu 0 o cifră a numărului dacă aceasta este pară și cu 1, dacă este impară. Astfel, numerele pe care le căutăm sunt de forma $\overline{0011}$, $\overline{0111}$, $\overline{1011}$, $\overline{1100}$, $\overline{1101}$ și $\overline{1110}$. În primele două cazuri prima cifră nu poate fi 0, deci ia 4 valori, iar restul cifrelor pot lua câte 5 valori, deci în fiecare dintre primele două cazuri sunt $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ numere. Pentru restul cazurilor nu mai avem restricție pentru prima cifră pentru că este impară, deci sunt câte $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ numere. În total sunt $2 \cdot 500 + 4 \cdot 625 = 3500$ numere pentru care expresia este număr impar. Pentru a răspunde la cerința problemei le vom scădea pe acestea din totalul numerelor naturale de 4 cifre și obținem $9000 - 3500 = \boxed{5500}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{5500}$ 5p

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore