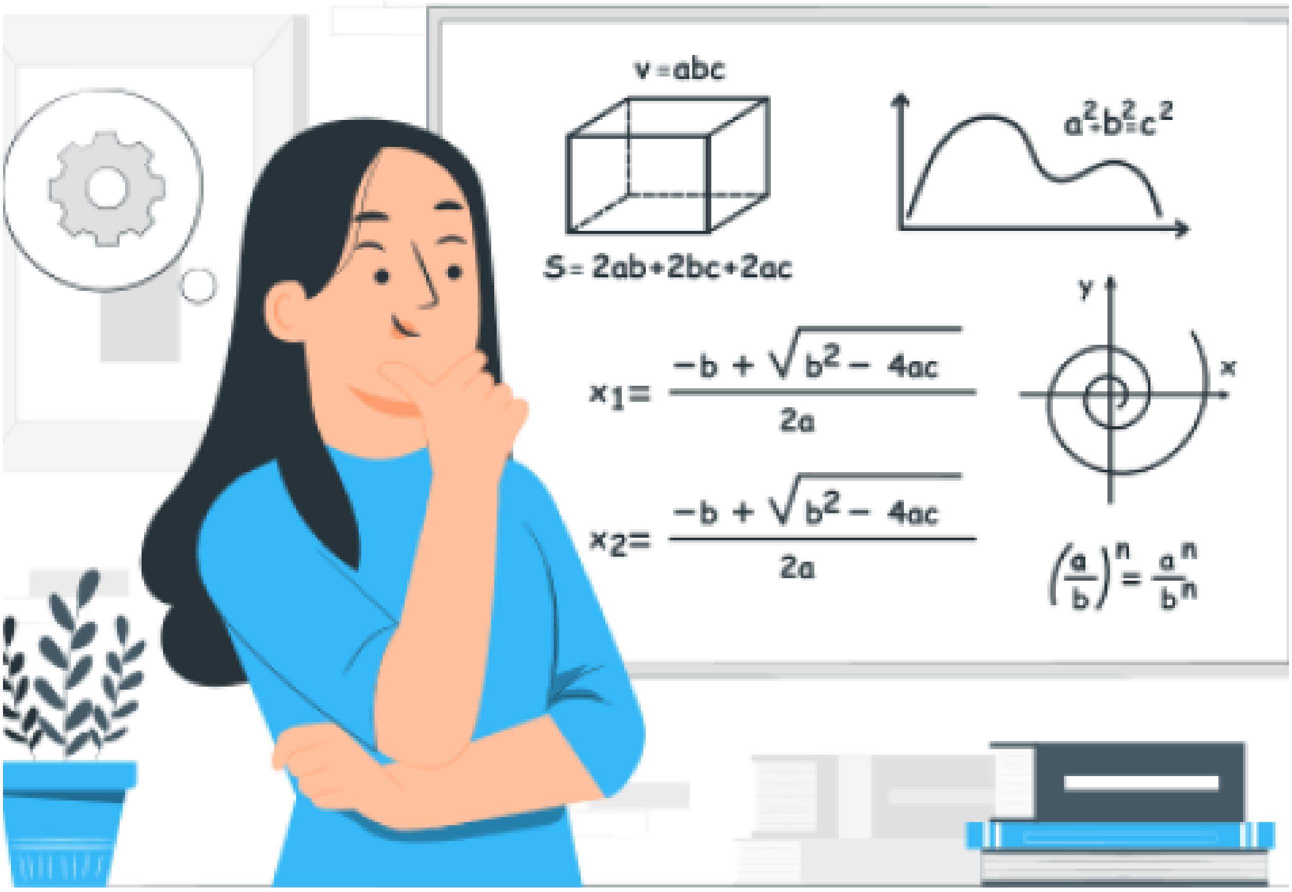


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa II
Clasa a VI-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Dacă $a_1 = 1+\frac{1}{1}$, $a_2 = 1+\frac{1}{2}$, $a_3 = 1+\frac{1}{3}, \ldots, a_{2024} = 1+\frac{1}{2024}$, atunci produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2024}$ are valoarea egală cu:

Demonstrație. $a_1 = 1+\frac{1}{1} = 2$, $a_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $a_3 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \ldots, a_{2024} = 1+\frac{1}{2024} = \frac{2025}{2024}$.

$$\Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2024} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2023} \cdot \frac{2025}{2024} \Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2024} = \boxed{2025}.$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{2025}$ 5*p*

□

Problema 2

Se consideră mulțimile $A = \{5n+2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{4m+3 \mid m \in \mathbb{N}\}$. Aflați cel mai mic număr de 3 cifre din mulțimea $A \cap B$.

Demonstrație. Fie x un element comun celor două mulțimi.

$$\begin{cases} x = 5n+2 \\ x = 4m+3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x = 20n+8 \\ 5x = 20m+15 \end{cases}$$

Prin scăderea celor două relații obținem $x = 20(m-n)+7$, deci $x = \mathcal{M}_{20}+7$. Cel mai mic număr de 3 cifre care dă restul 7 la împărțirea prin 20 este $20 \cdot 5 + 7 = \boxed{107}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{107}$ 5*p*

□

Problema 3

Tatăl Dariei i-a promis că în următoarea vacanță vor merge la Disneyland și își vor petrece acolo tot concediul de care beneficiază pentru ultimii doi ani de muncă. Știind că pentru 9 luni de muncă, tatăl Dariei are dreptul la 12 zile de concediu, aflați câte zile va petrece Daria la Disneyland.

Demonstrație. Dacă pentru 9 luni de muncă are dreptul la 12 zile de concediu, atunci pentru 3 luni de muncă are dreptul la $12 : 3 = 4$ zile de concediu. Aplicăm regula de trei simplă

3 luni .... 4 zile de concediu

24 de luni .... x zile de concediu

Numărul de zile de concediu de care beneficiază tatăl Dariei după doi ani de muncă este $x = \frac{24 \cdot 4}{3} = \boxed{32}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{32}$ 5*p*

□

Problema 4

Ana, Barbu, Corina și Dan au participat la un turneu de ping-pong. Fiecare jucător a concurat împotriva fiecăruia dintre ceilalți trei jucători exact de două ori. Pentru o victorie se acordă 1 punct, iar pentru o înfrângere se acordă 0 puncte. Mai jos sunt prezentate scorurile pe care le-au înregistrat trei dintre concurenți:

- Ana: 111011
- Barbu: 001010
- Corina: 010100

În exemplul de mai sus, Ana a câștigat primele trei meciuri, l-a pierdut pe al patrulea și apoi le-a câștigat pe următoarele 2. Dacă turneul se joacă în runde și în fiecare rundă joacă toți cei 4 copii, care este scorul pe care l-a obținut Dan?

Observație: Scorul lui Dan este o secvență de 6 cifre, fiecare cifră fiind 0 sau 1.

Demonstrație. În fiecare rundă există doi câștigători și doi pierzători. De exemplu, la primul meci Barbu și Corina au pierdut, deci Ana și Dan au câștigat, deci prima cifra din scorul lui Dan este 1. Repetând acest raționament obținem că scorul pe care l-a obținut Dan este $\boxed{100101}$.

Observație: În enunțul problemei din timpul concursului a lipsit precizarea că în fiecare rundă joacă toți cei 4 copii. Din acest motiv această problemă a fost anulată și s-a acordat punctaj maxim fiecărui participant.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{100101}$ 5*p*

□

Problema 5

Considerăm segmentul (AB) de lungime 1 m. Luăm punctele C_1, C_2, ..., C_{24} pe (AB), colorate cu roșu, astfel încât acestea îl împart în 25 de segmente egale, fiecare de 4 cm lungime. Luăm punctele D_1, D_2, ..., D_{19} pe (AB) colorate cu albastru, astfel încât acestea împart (AB) în 20 de segmente egale, fiecare de 5 cm lungime. Precizați câte segmente de lungime 1 cm au o extremitate colorată în roșu și cealaltă extremitate colorată în albastru.

Demonstrație. Segmente unitate se obțin când avem 2 numere consecutive, unul multiplu de 4 și celălalt multiplu de 5. Multiplul de 5 trebuie să fie impar, iar predecesorul sau succesorul său sigur este multiplu de 4. Găsim perechile $(4,5)$, $(15,16)$, $(24,25)$, $(35,36)$, $(44,45)$, $(55,56)$, $(64,65)$, $(75,76)$, $(84,85)$, $(95,96)$. În total 10 perechi, deci vom avea $\boxed{10}$ segmente unitate.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{10}$ 5*p*

□

Problema 6

Fie n un număr natural pentru care două dintre afirmațiile următoare sunt false și trei sunt adevărate.

A) $2n > 70$;

B) $n < 100$;

C) $3n > 25$;

D) $n \geq 10$;

E) $n > 5$.

Care este valoarea lui n?

Demonstrație.

- Dacă afirmația A este adevărată, atunci $n > 35$ și atunci și afirmațiile C, D, E sunt adevărate, deci sunt 4 afirmații adevărate și una falsă, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, afirmația A este falsă.
- Dacă afirmația D este adevărată, atunci și C și E sunt adevărate, deci cele false sunt A și B. Însă obținem o contradicție pentru că negarea lui A este $n \leq 35$, iar negarea lui B este $n \geq 100$, lucru care nu este posibil. Așadar și afirmația D este falsă.

În consecință, afirmațiile corecte sunt B, C și E. Din C știm că $n > 8$, iar din negarea lui D, care este falsă, avem $n < 10$, singurul număr care verifică toate condițiile este $\boxed{9}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{9}$ 5p

□

Problema 7

Despre numărul natural $A = 2^a \cdot 5^b$ știm că este divizibil cu 10 și că este cel mai mic pentru care numărul $10 \cdot A$ are cu 10 divizori mai mulți decât A. Care este valoarea numărului A?

Demonstrație. Cum $A \,\vdots\, 10$ obținem că a și b sunt nenule. Divizorii numărului $10 \cdot A = 2^{a+1} \cdot 5^{b+1}$ care nu sunt divizori și ai numărului A, sunt 2^{a+1}, $2^{a+1} \cdot 5$, $2^{a+1} \cdot 5^2, \ldots,$ $2^{a+1} \cdot 5^{b+1}$ și 5^{b+1}, $5^{b+1} \cdot 2$, $5^{b+1} \cdot 2^2, \ldots$ $5^{b+1} \cdot 2^a$, adică numărul A are în plus $b + 2 + a + 1$ divizori, deci $a + b = 7$. Numărul A este minim când exponentul lui 2 este maxim și exponentul lui 5 minim, deci $a = 6$ și $b = 1$. Obținem $A = 2^6 \cdot 5 = \boxed{320}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{320}$ 5p

□

Problema 8

Avem zece numere naturale, nu neapărat diferite. Facem sume de câte nouă numere. Nouă dintre sume au valorile 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91 și 92. Știind că a zecea sumă are exact aceeași valoare cu una din sumele de mai sus, găsiți suma celor zece numere.

Demonstrație. Observăm faptul că $82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 91 + 92 = 783$, care este divizibil cu 9. Dacă am aduna toate cele zece sume, rezultatul nostru s-ar divide cu 9 din faptul că fiecare număr original apare de 9 ori în această adunare. Astfel, a zecea sumă este și ea multiplu de 9 și singura valoare posibilă ar fi 90. Astfel, prin adunarea sumelor obținem $783 + 90 = 873$ și suma celor zece numere inițiale ar fi $873 : 9 = \boxed{97}$.

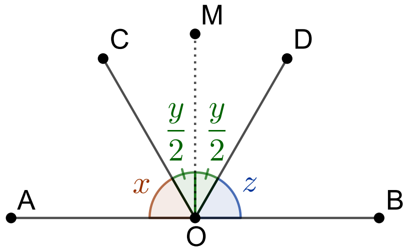
Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{97}$ 5p

□

Problema 9

Fie punctele coliniare A, O, B (în această ordine) și semidreptele $(OC$, $(OD$, în același semiplan față de dreapta AB, $(OC$ este inclusă în interiorul unghiului $\angle AOD$, astfel încât $m(\angle AOC) = x$, $m(\angle COD) = y$, $m(\angle DOB) = z$. Știind că măsurile unghiurilor $\angle AOC$, $\angle COD$, $\angle DOB$ sunt direct proporționale cu $y+z$, $z+x$, $x+y$, determinați măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\angle COD$ și dreapta AB.

Demonstrație. Din $\dfrac{x}{y+z} = \dfrac{y}{z+x} = \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \dfrac{1}{2}$ $(x+y+z \neq 0$, evident) obținem $2x = y+z$, $2y = x+z$ și $2z = x+y$. Din $2x = y+z$ și $2y = x+z$ obținem $z = 2x-y$ și $z = 2y-x$ de unde $2x-y = 2y-x$ adică $x = y$. Din $2y = x+z$ și $2z = x+y$ obținem $x = 2y-z$ și $x = 2z-y$, deci $y = z$. Din $x = y$ și $y = z$ avem $x = y = z$. Cum $m(\angle AOC)+ m(\angle COD)+ m(\angle DOB) = 180^\circ$ obținem $m(\angle AOC) = m(\angle COD) = m(\angle DOB) = 60^\circ$. Fie $(OM$ bisectoarea unghiului $\angle COD$, atunci $m(\angle COM) = 60^\circ : 2 = 30^\circ$. Astfel, $m(\angle AOC) + m(\angle COM) = 60^\circ + 30^\circ = \boxed{90^\circ}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{90}$ 5p

□

Problema 10

Fie $a, b \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Care este numărul de perechi (a, b) care sunt soluții ale ecuației

$$2024^a = a^{2n} + 4b - 2023?$$

Demonstrație. Ideea principală este că a^{2n} este pătrat perfect, iar un pătrat perfect este $\mathcal{M}_4$ sau $\mathcal{M}_4 + 1$.

- Dacă $a = 0$, ecuația devine $1 = 4b - 2023 \iff 4b = 2024 \iff b = 506$, așadar perechea $(a, b) = (0, 506)$ este o soluție a ecuației;
- Dacă $a > 0$, atunci $2024^a \,\vdots\, 4$, $4b - 2023 = 4b - 2024 + 1 = \mathcal{M}_4 + 1$, deci $a^{2n} = \mathcal{M}_4 + 3$, însă $a^{2n} = (a^n)^2$ este pătrat perfect și nu există pătrate perfecte de această formă, prin urmare ecuația nu are nicio soluție în acest caz.

Singura soluție a ecuației este $(a, b) = (0, 506)$, așadar numărul de soluții ale ecuației este egal cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{1}$ .... $5p$

$\square$

Problema 11

Numărul $\overline{3m7}$ se scrie ca o sumă de două numere naturale nenule x și y, direct proporționale cu numerele nenule a și b, iar a și b sunt invers proporționale cu 4 și 5. Care este valoarea cifrei m?

Demonstrație. Fie x și y cele două numere naturale nenule astfel încât $x+y=\overline{3m7}$. Din x și y direct proporționale cu a și b avem

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{x+y}{a+b}=\frac{\overline{3m7}}{a+b} \quad (1).$$

Din a și b invers proporționale cu 4 și 5 avem $4a=5b$ sau

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{4}=\frac{a+b}{9}. \quad (2)$$

Din (2) obținem că $a+b=\dfrac{9a}{5}$ și înlocuind în (1) avem

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{x+y}{a+b}=\frac{\overline{3m7}}{a+b}=\frac{5\cdot\overline{3m7}}{9a}.$$

Acum, din $\dfrac{x}{a}=\dfrac{5\cdot\overline{3m7}}{9a}$ obținem $x=\dfrac{5\cdot\overline{3m7}}{9}$. Cum x este număr natural deducem că $9\mid 5\cdot\overline{3m7}$ și cum $9\nmid 5$ rezultă $9\mid\overline{3m7}$, de unde deducem că $m=\boxed{8}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{8}$ .... $5p$

$\square$

Problema 12

Determinați cel mai mic număr natural $\overline{abc}$ divizibil cu 9 care are 12 divizori, iar numărul $\overline{bca}$ are 6 divizori.

Demonstrație. Cum $\overline{abc}$ este divizibil cu 9, rezultă că și $\overline{bca}$ este divizibil cu 9. Ținând cont de faptul că numărul $\overline{bca}$ are 6 divizori $(6=6\cdot1=2\cdot3)$, deducem că $\overline{bca}$ are în descompunerea sa în factori primi cel mult doi factori diferiți.

- Dacă $\overline{bca}=3^5=243$, atunci $\overline{abc}=324=2^2\cdot3^4$, care are $(2+1)\cdot(4+1)=15$ divizori, deci nu convine.
- Fie $\overline{bca}=3^2\cdot p^1, p$ număr prim. Cum numărul $\overline{abc}$ este cât mai mic, alegem $a=1$, iar mai departe deducem că ultima cifră a lui p este 9 . Așadar, $\overline{bca}\in\{9\cdot19,9\cdot29,9\cdot59,9\cdot79,9\cdot89,9\cdot109\}$. Obținem $\overline{abc}\in\{117,126,153,171,180,198\}$, iar cel care convine este $\boxed{126}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{126}$ .... $5p$

$\square$

Problema 13

Fie x și y numere naturale nenule cu proprietatea că $\frac{x}{y+3} = \frac{x-7}{y}$. Pentru cea mai mare valoare a raportului $\frac{x}{y}$, unde x și y sunt numere prime între ele, calculați valoarea sumei $x+y$.

Demonstrație. $\frac{x}{y+3} = \frac{x-7}{y} \iff xy = (x-7)(y+3) \iff xy = xy - 7y + 3x - 21 \iff 7y + 21 = 3x$. De aici obținem că $x \vdots 7$ și $y \vdots 3$, deci $x = 7x_1$ și $y = 3y_1$, x_1 și y_1 nenule. Înlocuim în ultima ecuație și obținem $21y_1 + 21 = 21x_1 \iff y_1 + 1 = x_1$.
$\frac{x}{y} = \frac{7x_1}{3y_1} = \frac{7}{3} \cdot \frac{y_1+1}{y_1} = \frac{7}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_1}\right)$. Observăm de aici că $\frac{x}{y}$ este maxim atunci când y_1 este minim, deci $y_1 = 1$ și $\frac{x}{y} = \frac{14}{3}$. Cum $(14,3) = 1$ rezultă $x = 14$ și $y = 3$, deci $x + y = \boxed{17}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{17}$ 5*p*

□

Problema 14

Pe dreapta d se consideră punctele A_0 și O. De aceeași parte a dreptei d se consideră unghiurile adiacente $\angle A_0OA_1, \angle A_1OA_2, \ldots, \angle A_{n-1}OA_n$ de măsuri $m(\angle A_0OA_1) = 2°$, $m(\angle A_1OA_2) = 4°$, $m(\angle A_2OA_3) = 6°$, $\ldots$, $m(\angle A_{n-1}OA_n) = 2n°$, unde n este cel mai mare număr natural astfel încât suma celor n unghiuri să nu depășească 180°. Considerăm $(OP$ bisectoarea unghiului $\angle A_{n-2}OA_{n-1}$ și $(OR$ bisectoarea unghiului $\angle A_{n-1}OA_n$. Care este măsura unghiului $\angle POR$?

Demonstrație. Vom afla care este valoarea numărului n impunând condiția $m(\angle A_0OA_1) + m(\angle A_1OA_2) + m(\angle A_2OA_3) + \ldots + m(\angle A_{n-1}OA_n) \leq 180° \iff 2+4+6+\ldots 2n \leq 180 \iff \frac{(2n+2)\cdot n}{2} \leq 180 \iff (n+1)\cdot n \leq 180 \implies n \leq 12$ pentru că $13 \cdot 14 = 182$, care este prea mare. De aici obținem $m(\angle A_{10}OA_{11}) = 22°$ și $m(\angle A_{11}OA_{12}) = 24°$. Măsura unghiului determinat de cele două bisectoare este $m(\angle POR) = m(\angle POA_{11}) + m(\angle A_{11}OR) = 11° + 12° = \boxed{23°}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{23}$ 5*p*

□

Problema 15

Fie mulțimea $M = \{1, 3, 5, \ldots, 87, 89\}$. Să se afle câte submulțimi ale lui M au suma elementelor egală cu 2000.

Demonstrație. Suma elementelor mulțimii M este egală cu $1 + 3 + 5 + \cdots + 89 = 45^2 = 2025$. Submulțimile mulțimii M care au suma elementelor 2000 sunt cele de forma $M \setminus A$, unde $A \subset M$ și suma elementelor mulțimii A este egală cu 25. Mulțimea A poate fi $\{25\}$, $\{1,3,21\}$, $\{1,5,19\}$, $\{1,7,17\}$, $\{1,9,15\}$, $\{1,11,13\}$, $\{3,5,17\}$, $\{3,7,15\}$, $\{3,9,13\}$, $\{5,7,13\}$, $\{5,9,11\}$, $\{1,3,5,7,9\}$. Prin urmare, numărul submulțimilor mulțimii M care au suma elementelor egală cu 2000 este $\boxed{12}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{12}$ 5*p*

□

Problema 16

Șirul crescător 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... este format din toate numerele naturale nenule care se pot scrie ca o sumă de puteri distincte ale lui 3. Găsiți al 100−lea termen al acestui șir.

Demonstraţie. Vom scrie mai întâi primii termeni ai șirului ca sume de puteri distincte ale lui 3. $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $4 = 3^1 + 3^0$, $9 = 3^2$, $10 = 3^2 + 3^0$, $12 = 3^2 + 3^1$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0, \ldots$.
În fiecare scriere fiecare putere al lui 3 apare o singură dată sau deloc. Asociem fiecărui astfel de număr câte o secvență scrisă cu cifrele 1 sau 0 construită astfel: dacă în scriere apare puterea 3^i, atunci pe poziția $i + 1$ (pozițiile se numerotează din spate în față), atunci scriem 1, altfel scriem 0. Obținem astfel un alt șir în care primii termeni sunt

$$1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111, \ldots .$$

Acest șir reprezintă, de fapt, scrierea în baza 2 a numerelor $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$, adică șirul format din numărul locurilor pe care le ocupă termenii în șir. Pentru a afla care este numărul de pe locul 100 vom reprezenta mai întâi numărul 100 în baza 2 și apoi facem asocierea de puteri ale lui 3. Știm că $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$, deci $100_{(10)} = 1100100_{(2)}$. Numărul de pe locul 100 este $3^6 + 3^5 + 3^2 = \boxed{981}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{981}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore