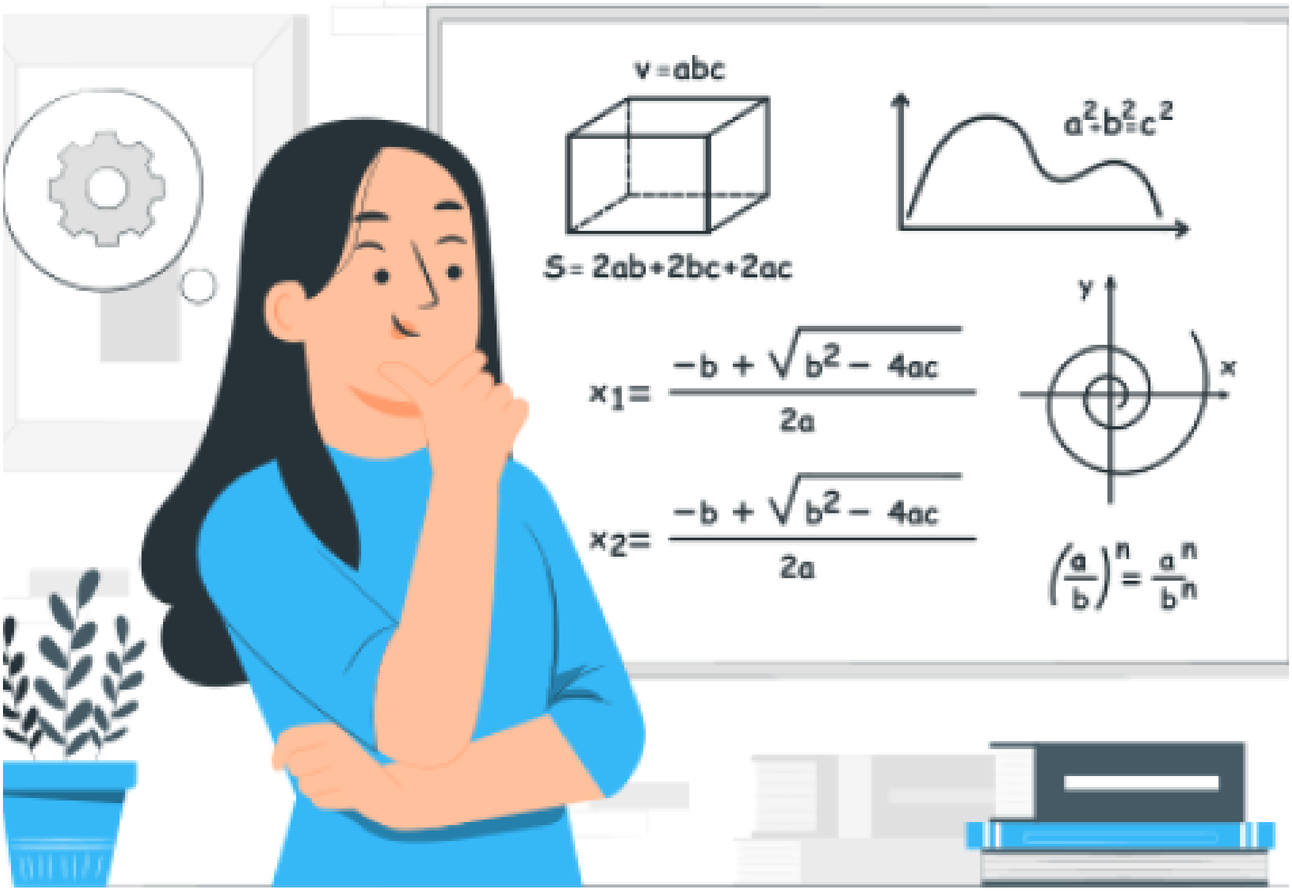


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Considerăm ecuația

$$\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x}{4\cdot 6}+\frac{x}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{x}{2022\cdot 2024}=\frac{2022}{253}.$$

Suma cifrelor soluției ecuației este egală cu:

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x}{4\cdot 6}+\frac{x}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{x}{2022\cdot 2024}=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2022\cdot 2024}\right)=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4-2}{2\cdot 4}+\frac{6-4}{4\cdot 6}+\frac{8-6}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{2024-2022}{2022\cdot 2024}\right)=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1011}{2024}=\frac{2022}{253} &\iff\\
x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8\cdot 253}=\frac{2}{253} &\iff\\
x=32.
\end{aligned}$$

Suma cifrelor soluției ecuației este $\boxed{5}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{5}$ 5*p*

□

Problema 2

Dacă $x,y\in\mathbb{R}^*$, $x\neq y$ și $2x^2-5xy+3y^2=0$ atunci valoarea raportului $\dfrac{2x+3y}{2x-y}$ este egală cu:

Demonstrație. $2x^2-2xy-3xy+3y^2=0 \iff 2x(x-y)-3y(x-y)=0 \iff (x-y)(2x-3y)=0$

$$\begin{cases}(x-y)(2x-3y)=0\\ x\neq y\end{cases} \implies 2x=3y, \text{ deci raportul } \frac{2x+3y}{2x-y}=\frac{3y+3y}{3y-y}=\frac{6y}{2y} \iff$$
$$\iff \frac{2x+3y}{2x-y}=\boxed{3}.$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{3}$ 5*p*

□

Problema 3

Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{5}$, atunci expresia $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}$ are valoarea egală cu:

Demonstrație. $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{5} \iff \dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{5} \iff x+\dfrac{1}{x} = 4 \iff \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 =$

$= x^2+2+\dfrac{1}{x^2} = 16 \iff x^2+\dfrac{1}{x^2} = 14.$

Pe de altă parte $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2} = \dfrac{x^4}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2} = x^2+1+\dfrac{1}{x^2} = \boxed{15}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{15}$ .... $5p$

□

Problema 4

Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ și $\dfrac{a}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \dfrac{b}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$, atunci expresia $4(a+b)$ are valoarea egală cu:

Demonstrație.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{7+4\sqrt{3}} &= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = \left|2+\sqrt{3}\right| = 2+\sqrt{3}\\ \sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}\\ \sqrt{4+2\sqrt{3}} &= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \left|\sqrt{3}+1\right| = \sqrt{3}+1\end{aligned}\right\} \implies \frac{a}{2+\sqrt{3}} + \frac{b}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1 \iff$$

$a(2-\sqrt{3}) + b(2+\sqrt{3}) = \sqrt{3}+1 \implies 2a+2b-1 = \sqrt{3}(a-b+1)$. Deoarece $a, b \in \mathbb{Q} \implies$

$$\begin{cases} 2a+2b-1=0 \\ a-b+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{3}{4} \end{cases} \implies a+b = \frac{1}{2} \implies \boxed{4(a+b)=2}$$

Observație: relația $2a+2b=1$ este suficientă și implică direct $a+b=\dfrac{1}{2}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{2}$ .... $5p$

□

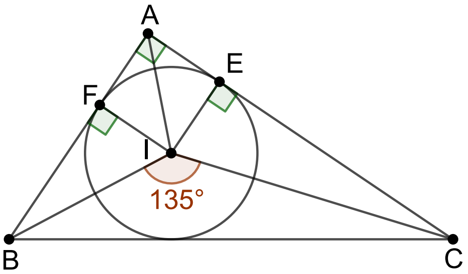
Problema 5

Dacă în $\triangle ABC$ punctul I este centrul cercului înscris, raza cercului înscris are lungimea $r = 7\sqrt{2}$ cm și $m(\angle BIC) = 135°$, atunci distanța de la I la ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$ este egală cu:

Demonstrație. Centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor. Vom demonstra că $\triangle ABC$ este dreptunghic în A. În $\triangle BIC$ exprimăm măsura unghiului $\angle BIC$ astfel, $m(\angle BIC) = 180° - m(\angle IBC) - m(\angle ICB) = 180° - \dfrac{m(\angle ABC)+m(\angle ACB)}{2} \iff$ $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 90° \iff \angle BAC$ este unghi drept.

Vom nota cu E, respectiv F punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile AC, respectiv AB. Segmentele (IE) și (IF) sunt raze, iar $IE \perp AC$ și $IF \perp AB$. Patrulaterul $ABCD$ este pătrat pentru că are trei unghiuri drepte și $IE = IF$.

Ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$ este chiar vârful unghiului drept, adică A, prin urmare distanța de la I la ortocentru este lungimea segmentului (AI), care este diagonală în pătratul $AEIF$, prin urmare $AI = IE\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \boxed{14}$.



Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{14}$ .... $5p$

□

Problema 6

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dacă $a + b + c = 3$ și $8a + b^2 + c^2 \leq 8 - 2bc$, atunci valoarea absolută a numărului a este egală cu:

Demonstrație.

$$\begin{cases} a+b+c=3 \iff b+c=3-a \\ 8a+(b^2+c^2+2bc) \leq 8 \iff 8a+(b+c)^2 \leq 8 \end{cases} \implies 8a+(3-a)^2 \leq 8 \iff$$
$$\iff 8a+9+a^2-6a \leq 8 \iff a^2+2a+1 \leq 0 \iff (a+1)^2 \leq 0 \iff a=-1 \iff$$
$$\iff \boxed{|a|=1}.$$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 7

Câte soluții naturale are ecuația

$$\left[\frac{x}{2024}\right] = \left[\frac{2^2+1^2}{2\cdot 2\cdot 1} + \frac{3^2+2^2}{2\cdot 3\cdot 2} + ... + \frac{2023^2+2022^2}{2\cdot 2023\cdot 2022} - 2022\right]?$$

Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului a.

Demonstrație.

$$\frac{2^2+1^2}{2\cdot 2\cdot 1} + \frac{3^2+2^2}{2\cdot 3\cdot 2} + ... + \frac{2023^2+2022^2}{2\cdot 2023\cdot 2022} - 2022 =$$
$$= \left(\frac{2^2+1^2}{2\cdot 2\cdot 1} - 1\right) + \left(\frac{3^2+2^2}{2\cdot 3\cdot 2} - 1\right) + ... + \left(\frac{2023^2+2022^2}{2\cdot 2023\cdot 2022} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 2023\cdot 2022} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2023\cdot 2022}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2023\cdot 2022}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2023}\right) = \frac{1011}{2023} \in [0, 1]\,.$$

Deci:

$$\left[\frac{2^2 + 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{3^2 + 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} + ... + \frac{2023^2 + 2022^2}{2 \cdot 2023 \cdot 2022} - 2022\right] = 0$$

Ecuația devine:

$$\left[\frac{x}{2024}\right] = 0 \implies x \in \{0, 1.2...., 2023\}\,.$$

Numărul soluțiilor naturale ale ecuației este egal cu $\boxed{2024}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{2024}$ .... $5p$

□

Problema 8

Care este partea întreagă a numărului $A = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 21}$?

Demonstrație. Soluția 1

Vom nota cu S suma de sub radical.

$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 21 \iff 4S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 4 \iff 4S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (4 - 0) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5 - 1) + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot (22 - 18) \iff 4S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 - 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \iff 4S = 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \iff S = 209 \cdot 210$. Cum $209^2 < 209 \cdot 210 < 210^2 \implies$ partea întreagă a numărului A este egală cu $\boxed{209}$.

Soluția 2

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + 19 \cdot 20 \cdot 21 = (2-1) \cdot 2 \cdot (2+1) + (3-1) \cdot 3 \cdot (3+1) + ... + (20-1) \cdot 20 \cdot (20+1) =$$

$$= (2^2 - 1) \cdot 2 + (3^2 - 1) \cdot 3 + ... + (20^2 - 1) \cdot 20 = (2^3 + 3^3 + ... + 20^3) - (2 + 3 + ... + 20) =$$

$$= \underbrace{(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3)}_{\left(\frac{20 \cdot (20+1)}{2}\right)^2} - \underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 20)}_{\frac{20 \cdot 21}{2}}$$

Deci trebuie calculată valoarea $\left[\sqrt{\left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 - \frac{20 \cdot 21}{2}}\right]$. Cum $\left[\sqrt{k^2 - k}\right] = k - 1 \implies \left[\sqrt{210^2 - 210}\right] = 210 - 1 = \boxed{209}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{209}$ .... $5p$

□

Problema 9

Aflați cea mai mică valoare strict pozitivă a sumei $a + b + c$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$ și verifică relațiile

$$max\,(a;\ b + c) - min\,(a;\ b + c) = 1$$

$$max\,(b;\ a + c) - min\,(b;\ a + c) = 2$$

$$max\,(c;\ a + b) - min\,(c;\ a + b) = 3.$$

Demonstrație.

Ținând cont de identitățile $max\,(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ și $min\,(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ relațiile din enunț se pot scrie astfel:
$max\,(a;\ b+c)-min\,(a;\ b+c)=1 \iff \dfrac{a+b+c+|a-b-c|}{2}-\dfrac{a+b+c-|a-b-c|}{2}=$ $=1 \iff |a-b-c|=1 \iff |b+c-a|=1$. Analog obținem și relațiile $|a+c-b|=2$ și $|a+b-c|=3$. Acestea sunt echivalente cu

$$b+c-a=\pm 1$$

$$a+c-b=\pm 2$$

$$a+b-c=\pm 3.$$

Adunând aceste trei relații se obține $a+b+c=\pm 1\pm 2\pm 3$. Pentru orice alegere a semnelor suma celor trei numere este număr divizibil cu 2, deci cea mai mică valoare strict pozitivă a expresiei $a+b+c$ se obține pentru alegerea $1-2+3$ și este egală cu $\boxed{2}$. Un exemplu pentru care se obține această valoare este $(a,b,c)=\left(\dfrac{1}{2},2,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{2}$ 5p

□

Problema 10

Dacă $A=\{a^2+6a+10\ \mid a\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{b^2+b+17\ \mid b\in\mathbb{N}\}$, aflați card$(A\cap B)$.

Demonstrație. Căutăm valorile lui a și b pentru care $a^2+6a+10=b^2+b+17 \iff 4a^2+24a+40=4b^2+4b+68 \iff (4a^2+24a+36)+4=(4b^2+4b+1)+67 \iff (2a+6)^2-(2b+1)^2=63 \iff (2a+2b+7)(2a-2b+5)=63$. Cum a și b sunt numere naturale rezultă $2a+2b+7>2a-2b+5>0$ și avem variantele:

- $\begin{cases}2a+2b+7=63\\2a-2b+5=1\end{cases} \implies \begin{cases}a=13\\b=15\end{cases}$
- $\begin{cases}2a+2b+7=21\\2a-2b+5=3\end{cases} \implies \begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$
- $\begin{cases}2a+2b+7=9\\2a-2b+5=7\end{cases} \implies \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

Intersecția celor două mulțimi are 3 elemente $\implies$ $\boxed{\text{card } A\cap B=3}$

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{3}$ 5p

□

Problema 11

Cea mai mare valoare a numărului natural prim p care are proprietatea că numărul $2p^2-3p+1$ este pătrat perfect este egală cu:

Demonstrație. Expresia $2p^2 - 3p + 1$ se poate descompune în $(p-1)(2p-1)$. Deoarece $p-1$ și $2p-1$ sunt prime între ele rezultă că $p-1$ și $2p-1$ sunt pătrate perfecte egale cu a^2 respectiv b^2, unde a, b sunt numere naturale nenule. Prin scădere se obține $b^2 - a^2 = p$ sau $(b-a)(b+a) = p$. Deoarece p este număr prim rezultă $b - a = 1$ și $b + a = p$, de unde $b = \dfrac{p+1}{2}$. Astfel egalitatea $2p-1 = b^2$ este echivalentă cu $4(2p-1) = (p+1)^2$, adică $p^2 - 6p + 5 = 0$ sau $(p-1)(p-5) = 0$. Singurul număr care verifică ipoteza este $\boxed{\text{p} = 5}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{5}$ 5*p*

□

Problema 12

Fie a și b două numere naturale nenule cu proprietatea că $2a^2(b-1) + 2b^2(a+1) = (a+b)(a^2+b^2+1)$. Care este valoarea absolută a diferenței numerelor a și b?

Demonstrație.
Soluția 1: Vom nota cu $n = a - b$, $n \in \mathbb{Z}$ și înlocuind $a = b + n$ în relația din enunț, după reducerea termenilor asemenea se obține $n^3 - 2n^2 + n + 2bn^2 - 4bn + 2b = 0 \iff n(n-1)^2 + 2b(n-1)^2 = 0 \iff (n-1)^2(n+2b) = 0$. Cum $n + 2b = a + b > 0$ rezultă $n = 1 \iff a - b = 1 \iff \boxed{|a-b| = 1}$.
Soluția 2: Desfacem parantezele în partea dreaptă și regrupăm. Astfel $2a^2(b-1) + 2b^2(a+1) = 2ab(a+b) + 2(b^2-a^2) = (a+b)[2ab+2(b-a)] \iff (a+b)[2ab+2(b-a)] = (a+b)(a^2+b^2+1) \iff 2ab + 2(b-a) = a^2 + b^2 + 1 \iff (b-a-1)^2 = 0 \iff b - a - 1 = 0 \iff \boxed{|a-b| = 1}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{1}$ 5*p*

□

Problema 13

Fie x, y, $z \in \mathbb{R}$ care verifică sistemul

$$\begin{cases} xy + 2z = 10 \\ yz + 2x = 10 \\ xz + 2y = 10 \end{cases}$$

Notăm cu S mulțimea valorilor pe care le poate lua x. Care este suma pătratelor elementelor mulțimii S?

Demonstrație.
Scădem din prima ecuație pe cea de-a doua și obținem $xy - yz + 2z - 2x = 0 \iff y(x-z) - 2(x-z) = 0 \iff (x-z)(y-2) = 0 \iff x = z$ sau $y = 2$.

1. Dacă $y = 2$ din prima și a treia ecuație $\implies \begin{cases} 2x + 2z = 10 \implies x + z = 5 \\ xz + 4 = 10 \implies xz = 6 \end{cases}$

   Înmulțim cu x ecuația $x + z = 5$ și obținem $x^2 + 6 = 5x \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff$ $\iff x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0 \iff x \in \{2,\ 3\}$. Înlocuind în una dintre ecuațiile sistemului obținem pentru $x = 2$ soluția $z = 3$ și pentru $x = 3$ soluția $z = 2$.

2. Dacă $x = z$ din prima și a treia ecuație $\implies \begin{cases} xy + 2x = 10 \implies x + z = 5 \\ x^2 + 2y = 10 \end{cases}$

   Prin scădere $x(x-y) - 2(x-y) = 0 \implies (x-y)(x-2) = 0 \implies x = 2$ sau $x = y$.

- Dacă $x = y = z \implies x^2 + 2x = 10$ Adunăm 1 în ambii membri ai ecuației și aceasta devine $\implies (x+1)^2 = 11 \iff x + 1 = \pm\sqrt{11} \iff x \in \{\sqrt{11} - 1,\ -\sqrt{11} - 1\}$.
- Dacă $x = 2$ rezultă că și $z = 2$. Înlocuind în una dintre ecuații obținem $y = 3$.

Deci mulțimea soluțiilor pentru x este $S = \left\{-\sqrt{11} - 1,\ \sqrt{11} - 1,\ 2,\ 3\right\}$
Suma pătratelor elementelor mulțimii S este

$$(-\sqrt{11} - 1)^2 + (\sqrt{11} - 1)^2 + 2^2 + 3^2 = 11 + 1 + 2\sqrt{11} + 11 + 1 - 2\sqrt{11} + 4 + 9 = \boxed{37}.$$

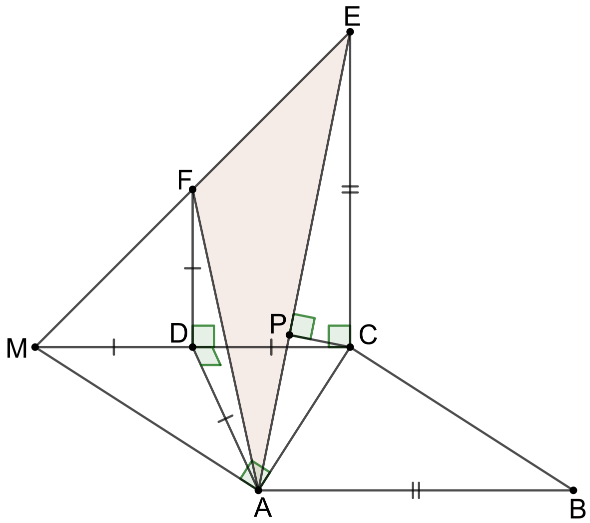
Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{37}$ .... $5p$

☐

Problema 14

$ABCD$ este un trapez dreptunghic cu bazele AB și CD, $m(\angle A) = 90°$, $AD = DC = a$ și $AB = 2a$. Pe perpendicularele în C și D, de aceeași parte a planului trapezului, se iau punctele E, respectiv F, astfel încât $CE = 2a$ și $DF = a$. Să se determine distanța de la B la planul (AEF) știind că $a = 7\sqrt{3}$.

Demonstrație. Fie $EF \cap CD = \{M\}$, $DC \subset (ABC)$, $M \in (ABC)$ și $M \in (AEF)$ pentru că $M \in EF$ și $EF \subset (AEF)$. Așadar, $AM = (AEF) \cap (ABC) \implies AM = (AEF) \cap (ABC)$.



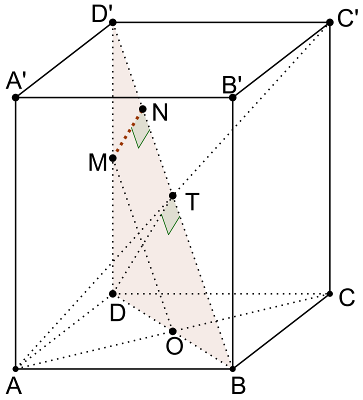
Deoarece $DF \parallel CE$, $DF = \dfrac{CE}{2} \implies DF$ linie mijlocie în $\triangle MEC \implies MD = DC = a \implies MC = 2a = AB$ și $MC \parallel AB \implies AMCB$ paralelogram $\implies AM \parallel BC$, $AM \subset (AEF) \implies BC \parallel (AEF)$ și distanța de la B la planul (AEF) este distanța de la orice alt punct al dreptei BC la (AEF).
$AD = MD = CD \implies m(\angle MAC) = 90°$ (reciproca teoremei medianei), $MA \perp AC$ și $MA \perp EC \implies MA \perp (ACE)$. Fie $CP \perp AE$, $CP \perp AM \implies CP \perp (MAE)$, așadar $d(B,(AEF)) = d(C,(AEF)) = CP$. Calculăm această distanță cu formula înălțimii corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul $\triangle AEC$, deci $CP = \dfrac{AC \cdot CE}{AE} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = 14$. Distanța de la punctul B la planul (AEF) este $\boxed{14}$.
Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{14}$ .... $5p$

☐

Problema 15

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AA' = 12$ cm. Dacă O este centrul bazei $ABCD$, punctul M este mijlocul muchiei (DD') și $\angle(OM, AC') = 60°$, calculați pătratul distanței de la M la BD'.

Demonstrație. Notăm latura bazei cu l și $AC' \cap BD' = \{T\}$.



Diagonala BD' se calculează aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle BDD' \implies BD' = \sqrt{2l^2 + 144}$. OM este linie mijlocie în $\triangle DD'B \implies MO \parallel BD' \implies \angle(MO, AC') = \angle(BD', AC') = \angle ATB$. În triunghiul dreptunghic $\triangle ABD'$ cateta (AD') este mai mare decât cateta (AB), deci $\angle ATB$ este unghiul ascuțit determinat de dreptele AC' și BD'. Așadar triunghiul $\triangle ATB$ este echilateral, deci $AB = \dfrac{AC'}{2} \iff l = \dfrac{\sqrt{l^2 + l^2 + 144}}{2} \iff 2l^2 + 144 = 4l^2 \iff l = \sqrt{72} \iff l = 6\sqrt{2}$. De aici mai obținem că diagonala bazei este $DB = l\sqrt{2} = 12$, deci $\triangle BDD'$ este dreptunghic isoscel, prin urmare mediana DT este și înălțime și este jumătate din ipotenuză (teorema medianei în triunghiul dreptunghic), deci $DT = \dfrac{BD'}{2} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 72 + 144}}{2} = 6\sqrt{2}$. Pe de altă parte, dacă N este mijlocul lui TD', atunci MN este linie mijlocie în $\triangle DTD' \implies MN \parallel DT$, $DT \perp BD' \implies MN \perp BD'$ și $MN = \dfrac{DT}{2} = 3\sqrt{2}$. Pătratul distanței de la punctul M la dreapta BD' este egal cu $MN^2 = \boxed{18}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{18}$ .... $5p$

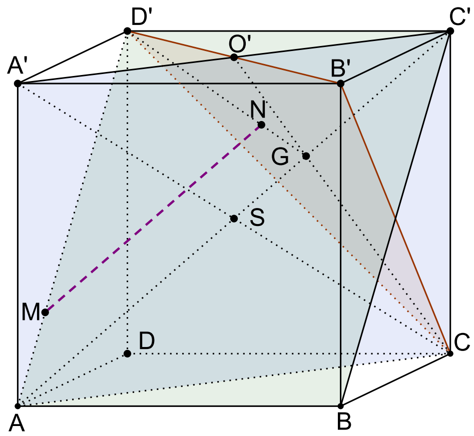
$\square$

Problema 16

Fie $ABCDA'B'C'D'$ cub de latură $24\sqrt{3}$. Pe diagonala (AD') considerăm punctul M, astfel încât $AD' = 4AM$. Aflați distanța de la M la planul $(B'D'C)$.

Adrian Bud, Negrești Oaş

Demonstrație.



1. Vom demonstra mai întâi că $AC' \perp (B'D'C)$ și apoi obținem că perpendiculara din M pe acest plan este paralela prin M la dreapta AC'.
   - $B'D' \perp (AA'C'C)$ pentru că $B'D' \perp A'C'$, $B'D' \perp AA'$, $AA' \cap A'C' = \{A'\}$, AA', $A'C' \subset (AA'C'C)$. De aici rezultă că $B'D'$ este perpendiculară pe fiecare dreptă inclusă în acest plan, prin urmare $B'D' \perp AC'$. (1)
   - În mod similar demonstrăm că $B'C \perp AC'$. (2)
   - Din (1) și (2), cum $B'C \cap B'D' = \{B'\}$, $B'C$, $B'D' \subset (B'CD') \implies AC' \perp (B'D'C)$.
2. Notăm cu G punctul de intersecție dintre dreapta AC' și dreapta $O'C$. Știm că CO' este mediană în $\triangle CC'A'$ și $C'S$ este mediană în $\triangle CC'A'$, (am notat cu S intersecția diagonalelor în dreptunghiul $ACC'A'$), deci $\dfrac{O'G}{GC} = \dfrac{1}{2}$. Aplicăm teorema lui Thales pentru $O'C' \parallel AC$ și avem $\dfrac{C'G}{GA} = \dfrac{O'G}{GC} = \dfrac{1}{2} \iff AG = \dfrac{2}{3}AC' = AG = \dfrac{2l\sqrt{3}}{3} = 48$.
3. Fie $MN \parallel AG$, $N \in D'G$. Cum $AG \perp (B'D'C) \implies MN \perp (B'D'C) \iff d(M, (B'D'C)) = MN$. Aplicăm TFA pentru $MN \parallel AG$ în $\triangle D'AG$ și obținem $\triangle D'MN \sim \triangle D'AG \implies \dfrac{D'M}{D'A} = \dfrac{MN}{AG} \iff \dfrac{MN}{AG} = \dfrac{3}{4} \iff MN = 36 \iff \boxed{d(M, (B'D'C)) = 36}$.

Răspuns corect (vezi soluția video aici): $\boxed{36}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore