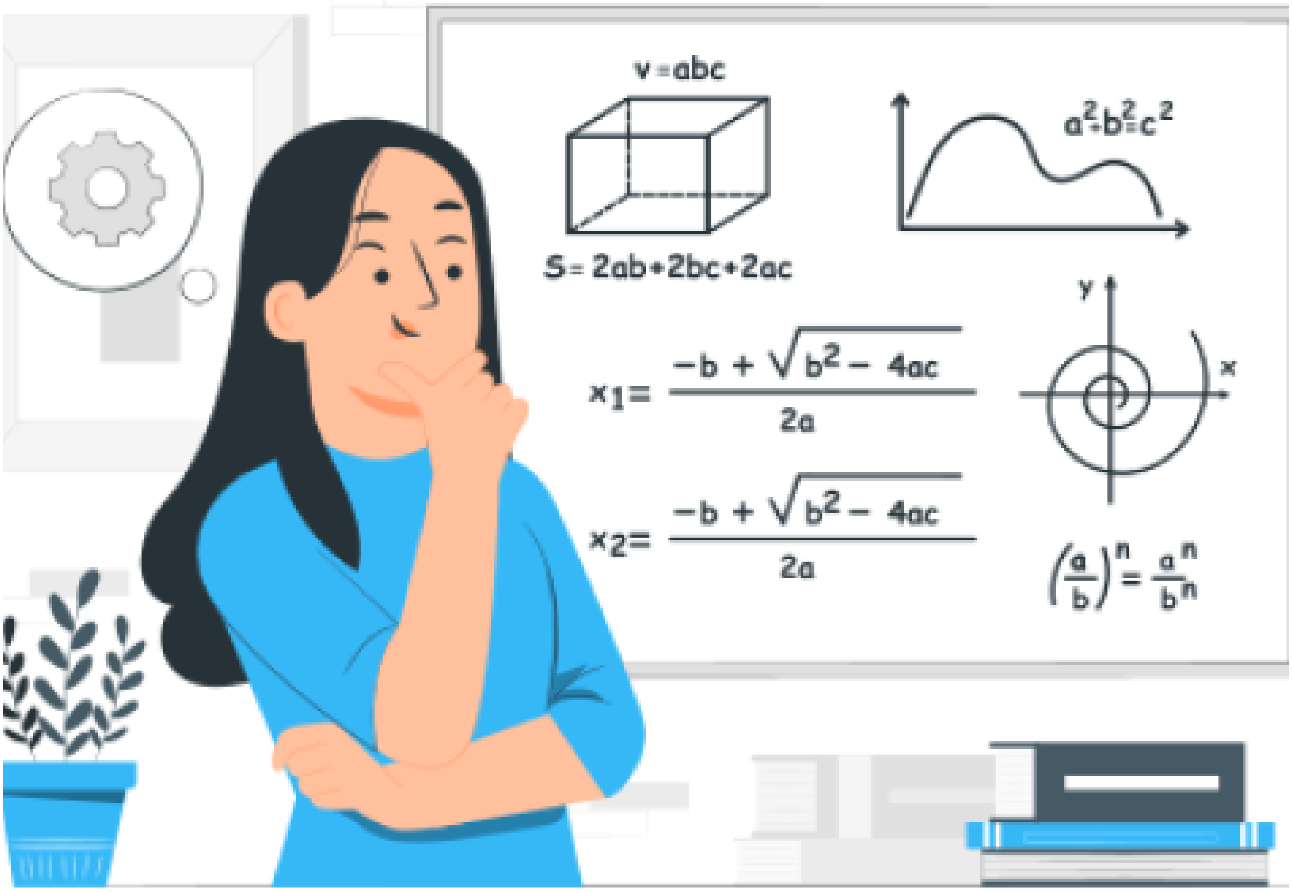

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Să se determine numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$ și numărul natural n cu proprietatea că $\overline{ab} = 2^n \cdot a + 5^n \cdot b$.

Demonstrație.

Să observăm mai întâi că, dacă $b \neq 0$, în membrul drept al ecuației avem o putere a lui 5 care crește foarte rapid la numere de 3 cifre. Dacă $n \geq 3$, atunci $5^n \cdot b \geq 5^n \geq 125 > \overline{ab}$. Rămâne să căutăm eventuale soluții printre valorile mici ale lui n, adică 0, 1 și 2.

- dacă $n = 0$ ecuația devine $\overline{ab} = a + b \iff 10 \cdot a + b = a + b \iff 9 \cdot a = 0$, fără soluție.
- dacă $n = 1$ ecuația devine $\overline{ab} = 2 \cdot a + 5 \cdot b \iff 10 \cdot a + b = 2 \cdot a + 5 \cdot b \iff 8 \cdot a = 4 \cdot b \iff$ $\iff 2 \cdot a = b$, de unde găsim soluțiile $\overline{ab} \in \{12,\ 24,\ 36,\ 48\}$.
- dacă $n = 2$ ecuația devine $\overline{ab} = 4 \cdot a + 25 \cdot b \iff 10 \cdot a + b = 4 \cdot a + 25 \cdot b \iff$ $\iff 6 \cdot a = 24 \cdot b \iff a = 4 \cdot b$ cu soluțiile $\overline{ab} \in \{41,\ 82\}$.

Dacă $b = 0$, atunci ecuația devine $\overline{a0} = 2^n \cdot a \iff 10a = 2^n \cdot a \iff 10 = 2^n$, care nu are soluție.

Barem:

- Explică de ce ecuația nu are soluții pentru $n \geq 3$ . . . . $2p$
- Rezolvă cazul $n = 0$ . . . . $1p$
- Rezolvă cazul $n = 1$ . . . . $2p$
- Rezolvă cazul $n = 2$ . . . . $1p$
- Rezolvă cazul $b = 0$ . . . . $1p$

$\square$

Problema 2

Moș Crăciun are pentru Ana, Bogdan și Crina 9 pungi cu bomboane. În fiecare pungă există un alt număr de bomboane reprezentat printr-o cifră nenulă. Moșul vrea să împartă toate bomboanele celor trei copii în mod egal și fiecărui copil să îi dea același număr de pungi cu bomboane. În câte moduri diferite poate Moș Crăciun să împartă bomboanele?

Demonstrație.

În cele 9 pungi sunt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ bomboane. Fiecare copil va primi $45 : 3 = 15$ bomboane. Ideea principală este de a vedea în câte moduri distincte îl putem scrie pe 15 ca suma a trei cifre nenule distincte.

$$15 = 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 = 3+5+7 = 4+5+6.$$

Oricum ar împărți bomboanele, Moș Crăciun trebuie să dea și punga care are o singură bomboană unui copil. Așa cum am arătat mai sus, pentru 1 combinațiile permise sunt $1 + 5 + 9$ și $1 + 6 + 8$. Prin urmare, avem doar două cazuri de discutat.

- Dacă alegem combinația 1+5+9, atunci rămân pungile 2, 3, 4, 6, 7, 8. Singura combinație care ne convine pentru 2 este $2 + 6 + 7$ pentru că în oricare dintre celelalte apare 5 sau 9. Prin urmare, grupele pe care le poate face Moșul sunt (1, 5, 9), (2, 6, 7) și (3, 4, 8). Acestea pot fi distribuite copiilor în 6 moduri pentru că aplicăm principiul produsului: pentru primul copil putem alege setul în 3 moduri diferite, pentru al doilea au mai rămas două variante, iar pentru al treilea una singură.

- Dacă alegem combinația 1+6+8, atunci rămân pungile 2, 3, 4, 5, 7, 9. Singura combinație care ne convine pentru 2 este $2 + 4 + 9$ pentru că în oricare dintre celelalte apare 6 sau 8. Prin urmare, grupele pe care le poate face Moșul sunt (1, 6, 8), (2, 4, 9) și (3, 5, 7). Acestea pot fi distribuite copiilor în 6 moduri din aceleași considerente ca la cazul anterior.

În consecință, Moș Crăciun poate să împartă bomboanele respectând toate cerințele din problemă în 12 variante distincte.

Barem:

- Găsește modurile de scriere a lui 15 ca sumă de 3 cifre nenule distincte . . . . $2p$
- Justifică alegerea tripletelor (1, 5, 9), (2, 6, 7) și (3, 4, 8) . . . . $2p$
- Justifică alegerea tripletelor (1, 6, 8), (2, 4, 9) și (3, 5, 7). . . . . $2p$
- Demonstrează că numărul de moduri de distribuire a pungilor este 12 . . . . $1p$

□

Problema 3

O secvență de numere naturale se numește *clasică* dacă fiecare termen, începând cu al treilea, este suma celor doi termeni din fața lui. Un exemplu de secvență clasică este

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

a) Câte secvențe *clasice* există în care al cincilea termen este 2024?

b) Într-o secvență *clasică* cu n termeni numărul termenilor impari este de două ori mai mare decât numărul termenilor pari. Care este restul împărțirii lui 2^n la 7?

Demonstrație.
a) Primii cinci termeni ai unei secvențe *clasice* sunt:

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2\cdot b,\ 2\cdot a+3\cdot b.$$

Deci $2\cdot a+3\cdot b=2024$. Pentru a afla numerele a și b să observăm că $2\cdot a \,\vdots\, 2$ și $2024 \,\vdots\, 2$, deci $3\cdot b \,\vdots\, 2$. Cum 2 și 3 sunt numere prime între ele, obținem $b \,\vdots\, 2 \iff b=2b_1$. Înlocuim în ecuație și obținem $2\cdot a+3\cdot 2\cdot b_1=2024 \iff a+3\cdot b_1=1012$. Cum $1012=3\cdot 337+1$ și $3\cdot b_1 \,\vdots\, 3 \implies a=\mathcal{M}_3+1$. Pe de altă parte $a\le 1012$, deci $a\in\{1,4,7,\ldots,1012\}$. Numărul valorilor pe care le poate lua a este 338 (îl numărăm și pe 0) și pentru fiecare valoare există soluție unică și pentru b, deci numărul secvențelor *clasice* care îl au pe 2024 al cincilea termen este 338.

b) Vom studia paritatea termenilor care apar într-o astfel de secvență, care este dată, evident, de paritatea primilor doi termeni.

- dacă primii doi termeni sunt pari, atunci secvența este de tipul

$$par,\ par,\ par,\ par,\ par,\ par, \ldots.$$

Prin urmare, toți termenii sunt pari, deci acest caz nu corespunde problemei noastre.

- dacă primii doi termeni sunt impari, atunci secvența este de tipul

$$impar,\ impar,\ par,\ impar,\ impar,\ par, \ldots.$$

În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par.

$-$ dacă $n = 3k$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni, numărul termenilor impari este $2k$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz convine.
$-$ dacă $n = 3k + 1$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimul număr este impar. Numărul termenilor impari este $2k + 1$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz nu convine.
$-$ dacă $n = 3k + 2$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimele două numere sunt impare. Numărul termenilor impari este $2k + 2$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz nu convine.

- dacă primul termen este impar și al doilea este par, atunci secvența este de tipul

$$impar,\ par,\ impar,\ impar,\ par,\ impar, \ldots.$$

În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par.

$-$ dacă $n = 3k$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni, numărul termenilor impari este $2k$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz convine.
$-$ dacă $n = 3k + 1$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimul număr este impar. Numărul termenilor impari este $2k + 1$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz nu convine.
$-$ dacă $n = 3k+2$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimele două numere sunt unul impar și unul par. Numărul termenilor impari este $2k + 1$ și numărul termenilor pari este $k + 1$, deci nici acest caz nu convine.

- dacă primul termen este par și al doilea este impar, atunci secvența este de tipul

$$par,\ impar,\ impar,\ par,\ impar,\ impar, \ldots.$$

În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par.

$-$ dacă $n = 3k$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni, numărul termenilor impari este $2k$ și numărul termenilor pari este k, deci acest caz convine.
$-$ dacă $n = 3k + 1$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimul număr este par. Numărul termenilor impari este $2k$ și numărul termenilor pari este $k + 1$, deci acest caz nu convine.
$-$ dacă $n = 3k+2$, atunci se formează k grupe complete de câte 3 termeni și ultimele două numere sunt unul par și unul impar. Numărul termenilor impari este $2k + 1$ și numărul termenilor pari este $k + 1$, deci nici acest caz nu convine.

În concluzie, o secvență *clasică* cu n termeni are numărul termenilor impari de două ori mai mare decât numărul termenilor pari dacă și numai dacă $n = 3k$. Atunci $2^n = 2^{3k} = 8^k = (7 + 1)^k = \mathcal{M}_7 + 1$. Restul împărțirii lui 2^n la 7 este egal cu 1.

Barem:

- Scrie ecuația $2 \cdot a + 3 \cdot b = 2024$ și obține $a + 3 \cdot b_1 = 1012$ . . . . $1p$
- Demonstrează că numărul căutat este 338 . . . . $1p$
- Analizează complet cazul *par, par* . . . . $1p$
- Analizează complet cazul *impar, impar* . . . . $1p$
- Analizează complet cazul *impar, par* . . . . $1p$
- Analizează complet cazul *par, impar* . . . . $1p$
- Demonstrează că restul este 1 . . . . $1p$

□

Problema 4

Determinați toate numerele naturale a, b, c și d, astfel încât $a > b > c > d$, $a+b+c+d = 137$ și $b \mid a$, $c \mid b$, $d \mid c$.

Demonstrație.

Fie $a > b > c > d$ cu $a + b + c + d = 137$.
Cum $d \mid a$, $d \mid b$ și $d \mid c \implies d \mid a + b + c + d \implies d \mid 137$. Cum 137 este număr prim obținem că $d = 1$ și $a + b + c = 136 = 2^3 \cdot 17$. Din c divide a și b rezultă c divide $a + b + c = 136$.

- Dacă $c = 2$, atunci $a + b = 134$. Cum $b \mid a$ și $b < a \implies a = k \cdot b$, $k > 1$ și $a + b = (k + 1) \cdot b = 134 = 2 \times 67$. Din ipoteză știm că $b > c$, deci $b = 67$ și $k + 1 = 2$, adică $k = 1$, ori asta nu este posibil pentru că $a > b$.
- Dacă $c = 4$, atunci $a + b = 132$. Cum $c \mid b$ și $c < b$ obținem că $4 \mid b$, $b > 4$ și analog ca la cazul anterior avem $(k + 1) \cdot b = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, de unde $b = 12$ sau $b = 44$. Valorile corespunzătoare pentru a sunt 120 și 88.
- Dacă $c = 8$, atunci $a + b = 128 = 2^7$ și $b = 16$ sau 32, pentru a găsim soluțiile 112 și 96.
- Dacă $c = 17$, atunci $a + b = 119 = 7 \cdot 17$ și în acest caz nu avem soluții.
- Dacă $c \geq 34$, atunci deoarece $c \mid b \implies b \geq 68$ și din $b \mid a \implies a \geq 136$. În acest caz $a + b + c + d > 137$ și nu avem soluții.

În concluzie soluțiile sunt $(a, b, c, d) \in \{(120, 12, 4, 1), (88, 44, 4, 1), (112, 16, 8, 1)(96, 32, 8, 1)\}$.

Barem:

- Demonstrează că $d = 1$. . . . . $1p$
- Analizează cazul $c = 2$. . . . . $1p$
- Analizează cazul $c = 4$. . . . . $1p$
- Analizează cazul $c = 8$. . . . . $1p$
- Analizează cazul $c = 17$. . . . . $1p$

- Analizează cazul $c > 17$. 1p
- Scrie mulțimea soluțiilor. 1p

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$

Timp de lucru: . . . . 3 ore