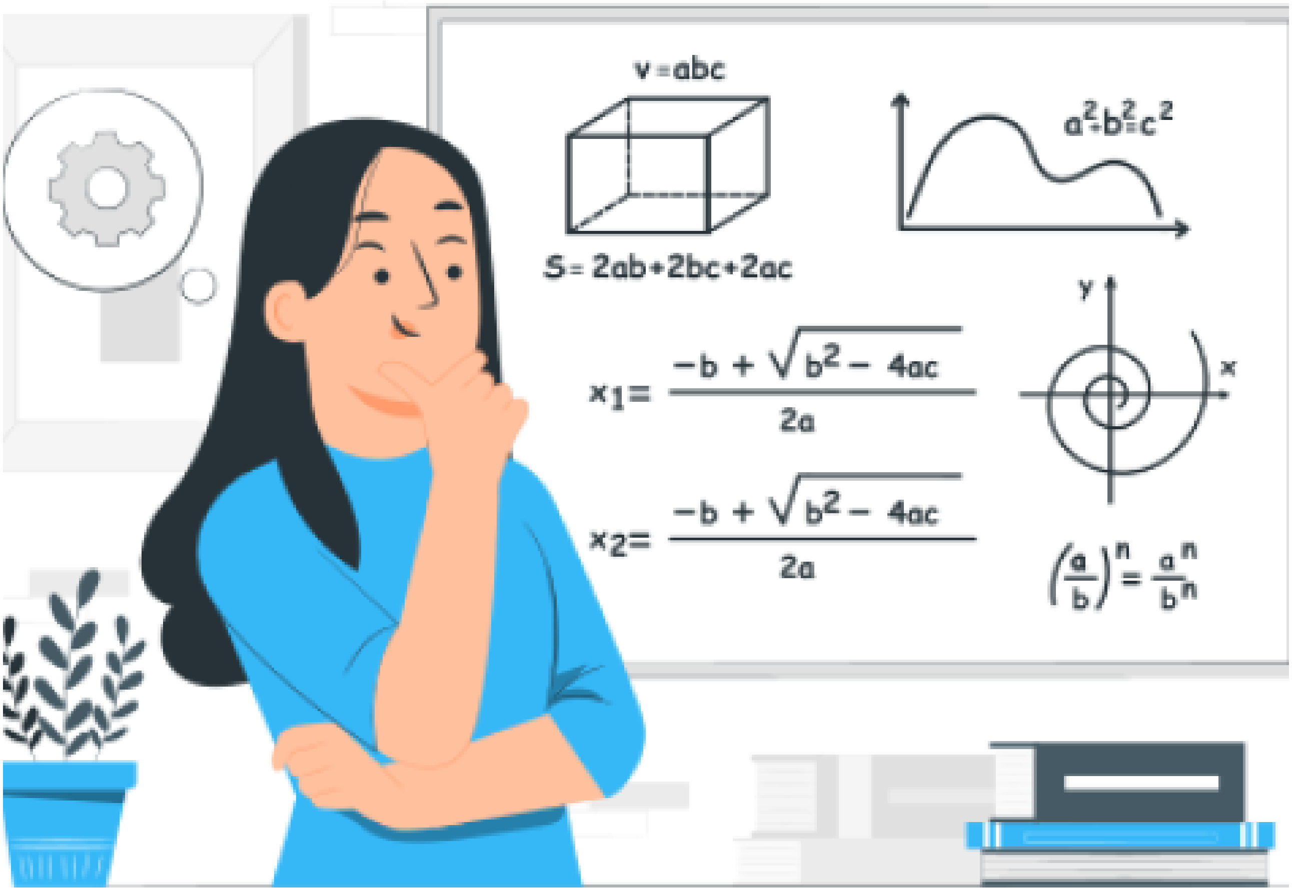


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Pentru numărul prim p, $p > 3$ considerăm mulțimea $A_p = \left\{ \frac{k+p^2}{24} \middle| k \in N, k \leq 2024 \right\}$. Determinați cardinalul mulțimii $A_p \cap \mathbb{N}$.

Demonstrație.

O fracție este număr natural dacă și numai dacă numitorul divide numărătorul. În mulțimea $A_p = \left\{ \frac{k+p^2}{24} \middle| k \in N, k \leq 2024 \right\}$ se află acele elemente din A_p care sunt numere naturale și, evident, ne punem problema să aflăm care sunt resturile lui p^2 la împărțirea prin 24.
Cum p este număr prim mai mare decât 3, înseamnă că p poate fi doar de una dintre formele $\mathcal{M}_{24}+1$, $\mathcal{M}_{24}+5$, $\mathcal{M}_{24}+7$, $\mathcal{M}_{24}+11$, $\mathcal{M}_{24}+13$, $\mathcal{M}_{24}+17$, $\mathcal{M}_{24}+19$, $\mathcal{M}_{24}+23$. În oricare dintre restul variantelor, numărul p ar avea un divizor propriu, în unele cazuri 2, în altele 3. Pentru a afla resturile lui p^2 la împărțirea prin 24 vom aplica formulele $(\mathcal{M}_a+b)^2 = \mathcal{M}_a + b^2$ și $(\mathcal{M}_a-b)^2 = \mathcal{M}_a + b^2$.

- $(\mathcal{M}_{24}+1)^2 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+5)^2 = \mathcal{M}_{24}+25 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+7)^2 = \mathcal{M}_{24}+49 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+11)^2 = \mathcal{M}_{24}+121 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+13)^2 = (\mathcal{M}_{24}-11)^2 = \mathcal{M}_{24}+121 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+17)^2 = (\mathcal{M}_{24}-7)^2 = \mathcal{M}_{24}+49 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+19)^2 = (\mathcal{M}_{24}-5)^2 = \mathcal{M}_{24}+25 = \mathcal{M}_{24}+1$;
- $(\mathcal{M}_{24}+23)^2 = (\mathcal{M}_{24}-1)^2 = \mathcal{M}_{24}+1$.

În consecință $p^2-1 \,\vdots\, 24$, oricare ar fi p număr prim mai mare decât 3. Atunci $\frac{k+p^2}{24} = \frac{k+1+p^2-1}{24} = \frac{k+1}{24} + \frac{p^2-1}{24}$. Cum $\frac{p^2-1}{24} \in \mathbb{N} \implies \frac{k+1}{24} \in \mathbb{N} \iff k = 24t+23$. Cum $k \leq 2024 \implies 24t+23 \leq 2024 \iff t \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 83\}$. Cardinalul mulțimii $A_p \cap \mathbb{N}$ este 84.

Barem:

- Scrie resturile lui p la împărțirea prin 24 .... $1p$
- Demonstrează $p^2-1 \,\vdots\, 24$ .... $2p$
- Obține $k = 24t+23$ .... $2p$
- Demonstrează că numărul căutat este 84 .... $2p$

□

Problema 2

Pe o tablă de dimensiuni 1×2024 în primele 7 pătrate din stânga tablei sunt plasate 7 monede, câte o monedă în fiecare pătrățel. Ana și Bianca joacă un joc după următoarele reguli: se ia orice monedă și se mută în dreapta cu un număr oarecare de pătrățele, cu condiția că două monede nu pot fi plasate în același pătrățel și nici nu se poate sări peste o altă monedă. Pierde acea fată care nu mai poate efectua mișcări. Ana începe jocul. Aflați cine are strategia câștigătoare și care este aceasta dacă ambele fete joacă fără greșeală.

Demonstrație.

Ana are strategie câștigătoare. Notăm monedele cu A, B, C, D, E, F, G în ordine de la stânga la dreapta. Ana mută moneda G până în colțul tablei. Colorăm monedele E și F în rosu, C și D în galben, A și B în albastru. La fiecare mișcare efectuată de Bianca, Ana răspunde cu mișcarea celeilalte monede de aceeași culoare cu același număr de pătrățele.

Barem:

- Descrie prima mutare . . . . $2p$
- Descrie strategia câștigătoare . . . . $5p$

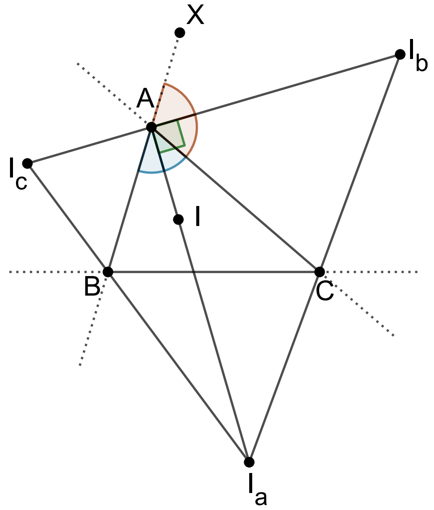
□

Problema 3

Se consideră triunghiul $\triangle ABC$. Vom nota cu I_a punctul de concurență al bisectoarei interioară a unghiului $\angle BAC$ și bisectoarelor unghiurilor exterioare triunghiului $\triangle ABC$ cu vârfurile în B și C. Definim în mod analog și punctele I_b, I_c. Notăm cu I punctul de intersecție al bisectoarelor interioare ale triunghiului $\triangle ABC$. Demonstrați că punctul I este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$.

Demonstrație.

Vom demonstra că punctele I_b, A și I_c sunt coliniare.



Acest lucru nu este dificil de realizat pentru că un lucru cunoscut este că măsura unghiului determinat de bisectoarele a două unghiuri adiacente este jumătate din suma lor, în particular, dacă unghiurile sunt și suplementare, atunci unghiul determinat de bisectoare este drept. Altfel, dacă vom considera punctul X pe prelungirea lui AB, dincolo de A, atunci $m(\angle I_aAI_b) =$

$m(\angle I_aAC)+ m(\angle CAI_b) = \dfrac{m(\angle BAC)}{2}+ \dfrac{m(\angle CAX)}{2} = 90°$. Așadar, $AI_b \perp AI_a$. Analog se demonstrează și că $AI_c \perp AI_a$, iar din unicitatea perpendicularei într-un punct pe o dreaptă rezultă că punctele I_b, A și I_c sunt coliniare și dreapta I_bI_c este dreapta AI_b. În mod analog se demonstrează și că punctele I_b, C și I_a, respectiv I_a, B și I_c sunt coliniare și în triunghiul $\triangle I_aI_bI_c$ înălțimile sunt I_aA, I_bB, respectiv I_cC, care sunt și bisectoarele interioare ale triunghiului $\triangle ABC$, care sunt concurente în I, deci I este ortocentrul triunghiului $\triangle I_aI_bI_c$.

Barem:

- Demonstrează că $AI_a \perp AI_b$ . . . . $2p$
- Justifică de ce punctele I_c, A, I_b sunt coliniare . . . . $3p$
- Afirmă că AI_a, BI_b, CI_c sunt înălțimi în $\triangle I_aI_bI_c$ și I este ortocentru . . . . $2p$

□

Problema 4

Determinați cel mai mic număr natural nenul n care are cel puțin 7 divizori pozitivi pe care îi notăm $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ și care verifică relațiile

$$d_7 = 2d_5 + 1 \text{ și } d_7 = 3d_4 - 1.$$

Kyiv City MO

Demonstrație.

Ni se dă un număr natural nenul n care are $k \geq 7$ divizori

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n,$$

astfel încât $d_7 = 2d_5 + 1$ și $d_7 = 3d_4 - 1$. Egalând aceste două relații obținem $3d_4 - 2d_5 = 2$. De aici rezultă că d_4 este număr par, deci $d_2 = 2$ pentru că este primul factor prim din descompunere și dacă ar fi diferit de 2, atunci toți divizorii ar fi impari. Deci $d_4 = 2t$. Înlocuind d_4 în ultima relație obținem

$$d_7 = 6t - 1 \quad (1).$$

Mai departe îl înlocuim pe d_7 în prima relație și obținem

$$d_5 = 3t - 1. \quad (2)$$

Despre t observăm că:

- t nu poate fi 2 pentru că atunci $d_4 = 4$ și deci $d_3 = 3$. Înlocuind în (1) obținem $d_7 = 11$ și din relația (2) obținem $d_5 = 5$. Cum doi dintre divizori sunt 2 și 3, rezultă că și 6 este un divizor, adică d_6. În plus, $2 \cdot 5 \mid n$, deci $d_7 \leq 10$, contradicție cu $d_7 = 11$.
- Dacă $t = 3$, atunci $d_4 = 6$, prin urmare și 3 este un divizor al numărului n și atunci $d_3 = 3$. În final, din relația (2) obținem $d_5 = 8$, adică primii 5 divizori sunt $1, 2, 3, 6, 8$ ceea ce este imposibil pentru că și 4 ar trebui să fie un divizor.
- Dacă $t = 4$, atunci $d_4 = 8$ și din relația (1) obținem $d_7 = 23$ și din (2) obținem $d_5 = 11$. Primii 7 divizori sunt $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7) = (1, 2, 4, 8, 11, 22, 23)$. Am găsit astfel un număr $n = d_4 \cdot d_5 \cdot d_7 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$, care satisface toate condițiile problemei.

Pentru a demonstra minimalitatea lui n să observăm că tripletul $(d_3, d_5, d_7) = (t, 3t-1, 6t-1)$ este format din trei numere prime între ele, și deci n se divide cu produsul lor. Vom nota $P(t) = t(3t-1)(6t-1)$. Atunci $2024 = 2 \cdot P(4) < P(5) \leq P(t)$, oricare ar fi $t \geq 5$. În concluzie 2024 este cel mai mic număr care satisface relațiile din enunț.

Barem:

- Obține $d_2 = 2$ .... $1p$
- Justifică $t \neq 2$ .... $1p$
- Justifică $t \neq 3$ .... $1p$
- Găsește soluția $n = 2024$ .... $2p$
- Demonstrează minimalitatea lui 2024 .... $2p$

$\square$

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$

Timp de lucru: .... 3 ore