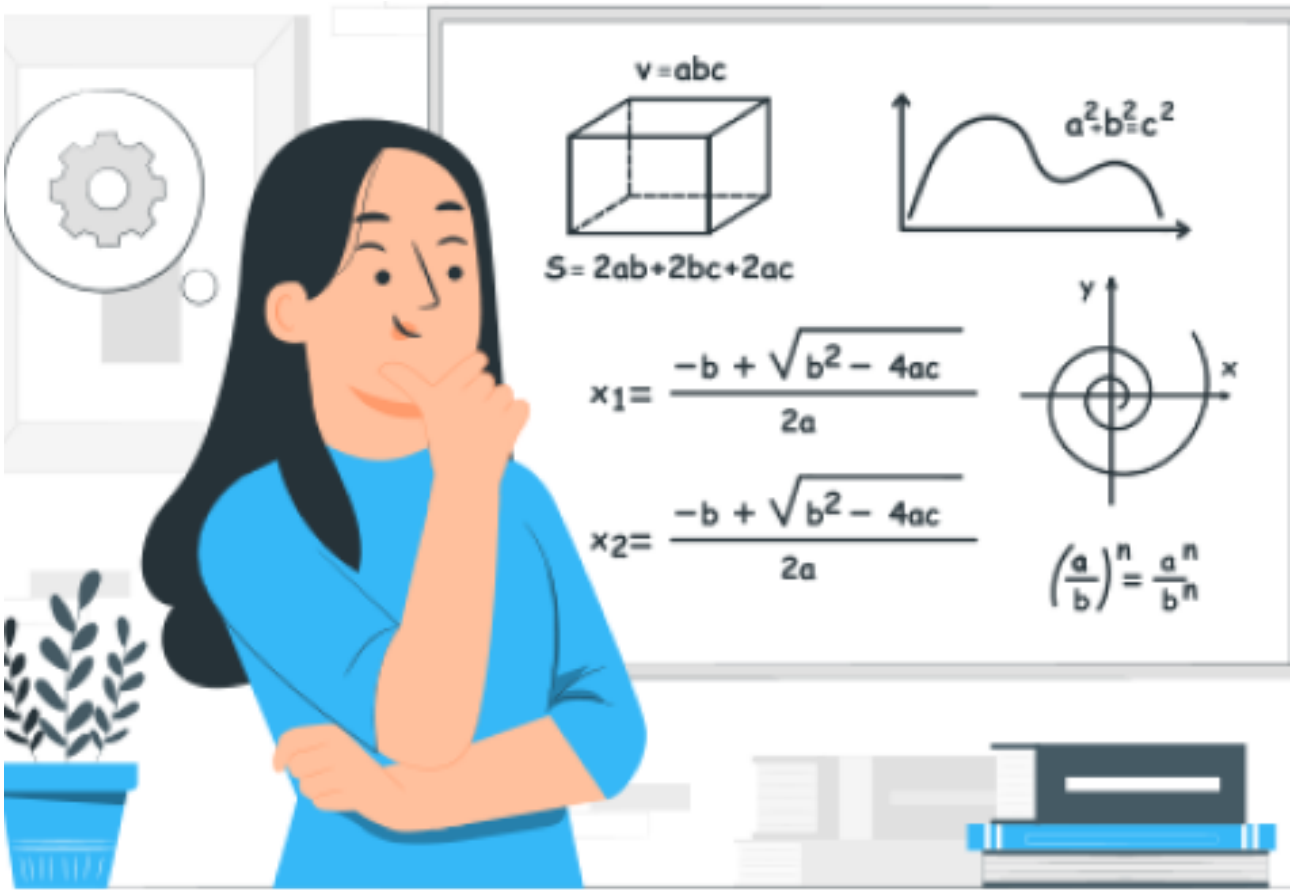



# Concursul de matematică Upper.School
# Ediția 2023-2024

## Etapa III
## Clasa a VII-a

## - Soluții -

**Lioara Ivanovici**

# §1 Soluții

**Problema 1**

Se dau numerele întregi pozitive $k$ și $m$, unde $k > m$, astfel încât $km\left(k^2 - m^2\right)$ este divizibil cu $k^3 - m^3$. Demonstrați că are loc inegalitatea $(k-m)^3 > 3km$.

*Demonstraţie.*

Fie $d$ cel mai mare divizor comun al numerelor $k$ și $m$. Atunci $k = da$ și $m = db$, unde $a$ și $b$ sunt numere prime între ele, iar $a > b$.
Numărul $km\left(k^2 - m^2\right) = d^4ab\left(a^2 - b^2\right) = d^4ab(a-b)(a+b)$ este divizibil prin $k^3 - m^3 = d^3\left(a^3 - b^3\right) = d^3(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$, deci avem

$$a^2 + ab + b^2 \mid dab(a+b).$$

Pentru că numerele $a$ și $b$ sunt relativ prime, atunci $a^2 + ab + b^2$ este relativ prim cu $a$, $b$ și $a + b$. Atunci $a^2 + ab + b^2 \mid d$ de unde, în particular, $d \geqslant a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab > 3ab$. În final,

$$(k-m)^3 = d^3(a-b)^3 \geqslant d^3 = d^2 \cdot d > d^2 \cdot 3ab = 3km.$$

**Barem:**

- Scrie $k = da$, $k = db$ și obține $a^2 + ab + b^2 \mid dab(a+b)$ ..... $2p$
- Demonstrează că $d > 3ab$ ..... $3p$
- Finalizare ..... $2p$

□

**Problema 2**

O secvență de 2024 numere întregi pozitive se numește *clasică* dacă, fiecare termen, începând cu al treilea, este suma celor doi termeni care îl preced. De exemplu, numerele $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$ sunt primii termeni ai unei secvențe *clasice*. Pentru un număr întreg $n$ știm că există exact 2025 secvențe *clasice* în care fiecare dintre primii doi termeni este mai mic strict decât $2n$ și numărul termenilor impari este mai mare strict decât dublul numărului termenilor pari. Aflați valoarea lui $n$.

*Demonstraţie.*

Vom studia paritatea termenilor care apar într-o astfel de secvență, care este dată, evident, de paritatea primilor doi termeni.

- dacă primii doi termeni sunt pari, atunci secvența este de tipul

$$par,\ par,\ par,\ par,\ par,\ par, \ldots.$$

  Prin urmare, toți termenii sunt pari, deci acest caz nu corespunde problemei noastre.

- dacă primii doi termeni sunt impari, atunci secvența este de tipul

$$impar,\ impar,\ par,\ impar,\ impar,\ par, \ldots.$$

  În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par. Cum secvența are 2024 de termeni și $2024 = 3 \cdot 674 + 2$, înseamnă că avem 674 de grupe complete *impar*, *impar*, *par*, iar ultimii doi termeni sunt impari. Numărul termenilor impari este $2 \cdot 674 + 2$ și dublul numărului termenilor pari este $2 \cdot 674$, așadar acest caz ne convine.

- dacă primul termen este impar și al doilea este par, atunci secvența este de tipul

$$impar,\ par,\ impar,\ impar,\ par,\ impar, \ldots.$$

  În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par. Cum secvența are 2024 de termeni și $2024 = 3 \cdot 674 + 2$, înseamnă că avem 674 de grupe complete *impar*, *par*, *impar*, iar ultimii doi termeni sunt unul impar și altul par. Numărul termenilor impari este $2 \cdot 674 + 1$ și dublul numărului termenilor pari este $2 \cdot 675$, așadar acest caz nu ne convine.

- dacă primul termen este par și al doilea este impar, atunci secvența este de tipul

$$par,\ impar,\ impar,\ par,\ impar,\ impar, \ldots.$$

  În fiecare grupă de 3 termeni consecutivi două numere sunt impare și unul este par. Cum secvența are 2024 de termeni și $2024 = 3 \cdot 674 + 2$, înseamnă că avem 674 de grupe complete *par*, *impar*, *impar*, iar ultimii doi termeni sunt unul par și celălalt impar. Numărul termenilor impari este $2 \cdot 674 + 1$ și dublul numărului termenilor pari este $2 \cdot 675$, așadar nici acest caz nu ne convine.

În consecință, secvențele care convin sunt cele care încep cu două numere impare. Acum, acestea pot fi alese oricum dintre numerele impare mai mici decât $2n$, adică din mulțimea $\{1,\ 3,\ 5, \ldots, 2n-1\}$, care este de cardinal $n$. Cum nu se precizează că numerele sunt distincte, înseamnă că putem face alegerea în $n^2$ moduri, adică numărul secvențelor *clasice* care verifică toate condițiile problemei este $n^2 = 2025 \iff n = 45$.

**Barem:**

- Analizează complet cazul *par, par* ..... $1p$
- Analizează complet cazul *impar, impar* ..... $2p$
- Analizează complet cazurile *impar, par* și *par, impar* ..... $3p$
- Calculează numărul de moduri în care poate fi aleși primii doi termeni ai unei secvențe *clasice* și află numărul cerut ..... $1p$

□

**Problema 3**

Se consideră triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ cu ortocentrul $H$ și dreapta $d$ care trece prin $A$ și nu intersectează interiorul triunghiului. Proiecția punctului $H$ pe dreapta $d$ se notează cu $X$ și mijlocul laturii $(BC)$ se notează cu $Y$. Arătați că, dacă $YX = YA$, atunci dreapta $d$ este tangentă în $A$ la cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$.

Mihaela Berindeanu

*Demonstraţie.*

Vom nota cu $D$ punctul diametral opus lui $A$ pe cercul circumscris triunghiului $ABC$ și cu $Z \in d$ piciorul perpendicularei din $Y$ pe $d$. În plus, $DH \cap d = \{T\}$.

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle ACD) = 90^\circ \implies CD \perp AC, \\ m(\angle ABD) = 90^\circ \implies DB \perp AB \\ BH \perp AC,\ CH \perp AB \end{array}\right\} \implies CD \parallel BH \text{ și } BD \parallel CH.$$

Așadar $BHCD$ este paralelogram, deci $HD \cap BC = \{Y\}$ și $HY = YD$.
În $\triangle AYX$, $YZ \perp AX$ și din ipoteză $YX = YA \Rightarrow \triangle AYX$ este isoscel și $YZ$ este mediatoarea segmentului $AX$ și atunci $ZX = ZA$.

$$\left\{\begin{array}{l} HX \perp AX \\ YZ \perp AX \end{array}\right. \implies HX \parallel YZ.$$

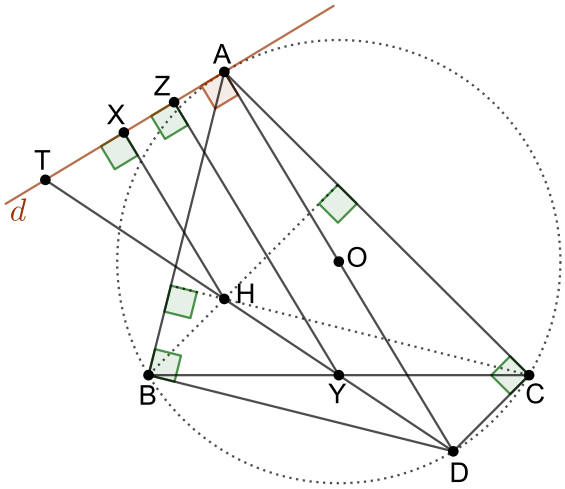
Aplicăm teorema lui Thales și obținem

$$\frac{TX}{XZ} = \frac{TH}{HY} \iff \frac{TX}{2XZ} = \frac{TH}{2HY} \iff \frac{TX}{XA} = \frac{TH}{HD}.$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales obținem că $HX \parallel AD$.

$$\left\{\begin{array}{l} HX \parallel AD \\ HX \perp AX \end{array}\right. \implies AD \perp AX.$$

Deoarece $AD$ este și diametru rezultă că $AX$ este tangentă în $A$ la cercul circumscris $\triangle ABC$.




**Barem:**

- Construiește $D$ punctul diametral opus lui $A$ pe cercul circumscris triunghiului $ABC$ și $Z \in d$ piciorul perpendicularei din $Y$ pe $d$ ..... $2p$
- Demonstrează $HY = YD$ ..... $2p$
- Demonstrează $HX \parallel YZ$ ..... $1p$
- Demonstrează $HX \parallel AD$ ..... $1p$
- Demonstrează $AD \perp AX$ ..... $1p$

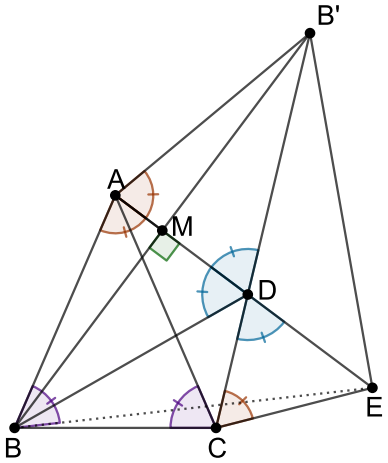
□

**Problema 4**

Fie un triunghi ascuțitunghic $ABC$. Fie $E$ un punct astfel încât $B$ și $E$ să fie pe părți diferite de dreapta $AC$ și fie $D$ un punct pe $(AE)$. Dacă avem $\angle ADB \equiv \angle CDE$, $\angle BAD \equiv \angle ECD$ și $\angle ACB \equiv \angle EBA$, demonstrați faptul că $B$, $C$ și $E$ sunt coliniare.

*Demonstraţie.*

**Soluția 1:** Condiția $\angle ADB \equiv \angle CDE$ ne sugerează să construim simetricul lui $B$ față de $AE$, pe care îl notăm cu $B'$. Construcția este naturală din principiul reflexiei, cunoscut în matematică ca și problema biliardului.



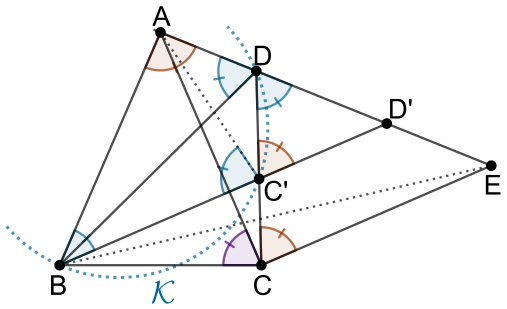

Dreapta $AE$ este mediatoarea segmentului $(BB')$, deci $DB = DB'$ și de aici obținem $\angle BDA \equiv \angle B'DA$, care este congruent și cu $\angle EDC$, deci $\angle B'DA \equiv \angle EDC \implies$ punctele $C$, $D$ și $B'$ sunt coliniare. Avem $\angle EAB' \equiv \angle EAB \equiv \angle ECD \equiv \angle ECB'$, deci $B'ACE$ este patrulater inscriptibil. Asta implică faptul că $m(\angle ECA) = 180° - m(\angle EB'A) = 180° - m(\angle EBA) = 180° - m(\angle ACB)$, deci $m(\angle ECA) + m(\angle ACB) = 180°$. În concluzie, $B$, $C$ și $E$ sunt coliniare.

**Comentarii**

- Din același principiu puteam să ducem simetricul lui $C$ față de $AE$, notat $C'$, care se verifică că este coliniar cu $B$ și $D$ și am avea $ABEC'$ patrulater inscriptibil, deci $m(\angle ECA) = m(\angle EC'A) = 180° - m(\angle EBA) = 180° - \angle ACB$, adică $m(\angle ECA) + m(\angle ACB) = 180°$, de unde rezultă concluzia.

- Din coliniaritatea lui $B$, $C$ și $E$, condiția că $\angle ACB \equiv \angle EBA$ implică faptul că $AB = AC$, în timp ce condiția $\angle BAD \equiv \angle ECD$ implică $ABCD$ patrulater inscriptibil. Ultimul fapt ne duce către o nouă idee de soluție care se bazează pe aceste informații:
  $a)$ $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$;
  $b)$ punctele $B$, $C$ și $E$ sunt coliniare $(B - C - E)$;
  $c)$ $AE$ taie cercul circumscris lui $ABC$ în punctul $D$.

**Soluția 2** Presupunem că $B$, $C$ și $E$ nu sunt coliniare. Considerăm dreapta prin $B$ paralelă cu $CE$ și o intersectăm cu dreptele $CD$ și $AD$ în punctele $C'$, respectiv $D'$. D




Deoarece $\angle D'C'D \equiv \angle ECD \equiv \angle BAD$, patrulaterul $ABC'D$ este patrulater inscriptibil. Notăm cercul circumscris al patrulaterului cu $\mathcal{K}$. Avem $\angle AC'B \equiv \angle ADB \equiv \angle CDE \equiv \angle C'DE \equiv \angle ABC'$, deci $\angle AC'B \equiv \angle ABC'$, care implică $\triangle ABC'$ isoscel.

- Dacă punctul $C$ se află în exteriorul lui $C'D$, atunci $C$ se află în exteriorul cercului $\mathcal{K}$ (pe aceeași parte față de $AB$ cu punctul $C'$), deci $m(\angle ACB) < m(\angle AC'B) = m(\angle ABC') = m(\angle ABD') < m(\angle ABE)$ (deoarece $D'$ este între $A$ și $E$), fapt care contrazice $\angle ACB \equiv \angle EBA$.

- Dacă punctul $C$ se află în interiorul segmentului $(C'D)$, atunci $C$ se află în interiorul lui $\mathcal{K}$ (pe aceeași parte față de $AB$ cu punctul $C'$), deci $m(\angle ACB) > m(\angle AC'B) = m(\angle ABC') = m(\angle ABD') > m(\angle ABE)$ (deoarece $E$ este între $A$ și $D'$), fapt care contrazice $\angle ACB \equiv \angle EBA$.

Astfel, $C = C'$ și obținem $BC' = BC$, fapt care implică $CE \parallel BC$. În concluzie, $B$, $C$ și $E$ sunt coliniare.

**Barem:**

- Construiește $B'$ simetricul lui $B$ față de $AE$ și demonstrează că $C$, $D$, $B'$ sunt coliniare ..... $3p$
- Demonstrează că $B'ACE$ este inscriptibil ..... $3p$
- Finalizare ..... $1p$

□

**Problemele 1-4:** ..... $4 \times 7p = 28p$
**Puncte acordate din oficiu:** ..... $0p$
**Total:** ..... $28p$

**Timp de lucru:** ..... 4 ore