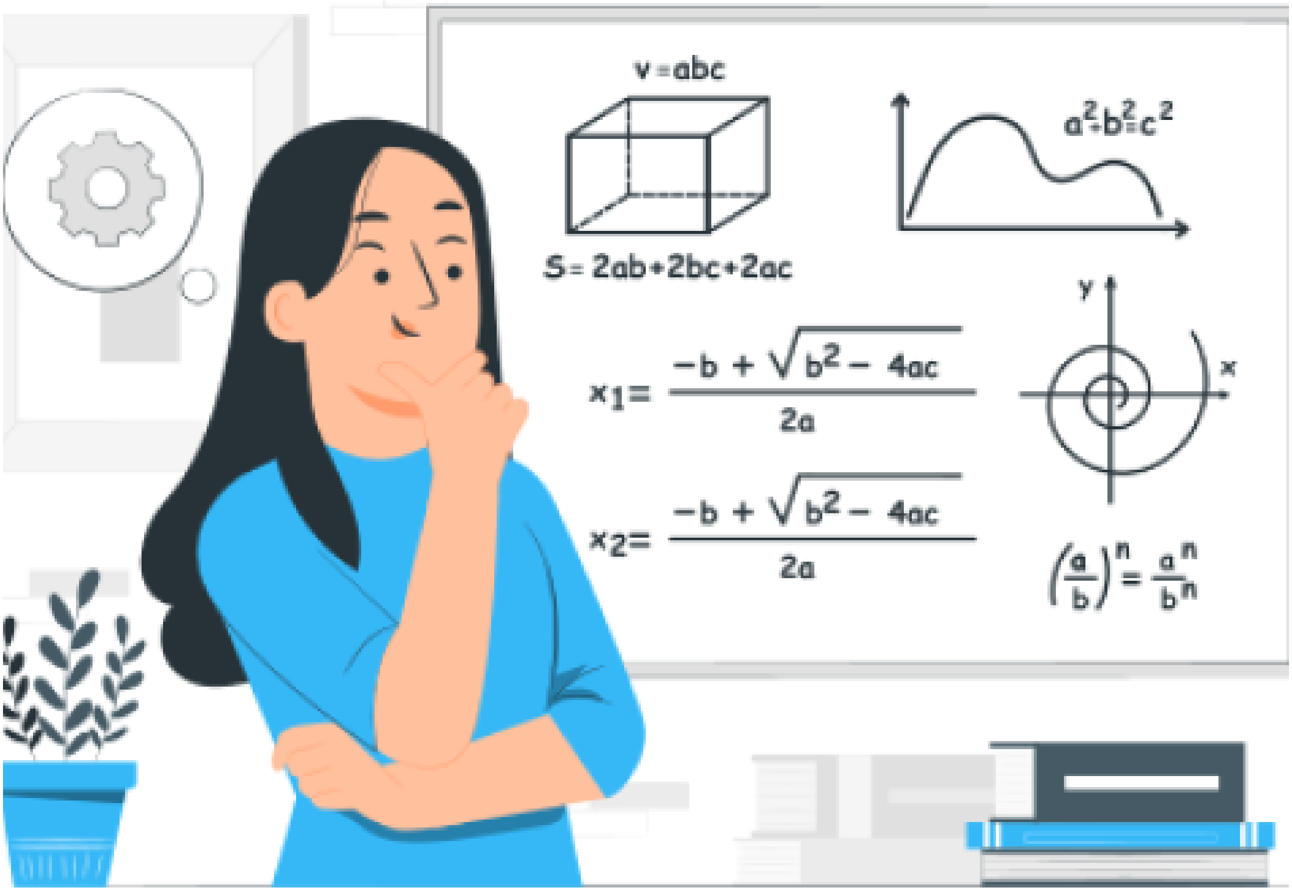


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 formăm toate numerele de 7 cifre distincte. Câte dintre acestea sunt divizibile cu 11?

Demonstrație.

Vom nota cu $\overline{abcdefg}$ numărul format cu cele 7 cifre și cu $S = a - b + c - d + e - f + g$. Știm că $\overline{abcdefg} \vdots 11 \iff S \vdots 11$. Mai notăm cu $P = a + c + e + g$ și $N = b + d + f$, deci $S = P - N$. Cea mai mare valoare a sumei S se obține când P este maxim și N minim, deci $S_{max} = (4 + 5 + 6 + 7) - (1 + 2 + 3) = 16$. Cea mai mică valoare a sumei S se obține când P este minim și N maxim, deci $S_{min} = (1 + 2 + 3 + 4) - (5 + 6 + 7) = -8$. Cum S trebuie să se dividă cu 11 și $-8 \le S \le 16$, avem soluțiile $S = 0$ și $S = 11$. Suma primelor 7 numere întregi pozitive este $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ și cum fiecare număr contribuie strict la una dintre P și N, obținem $P + N = 28$.

- Cazul $S = 11$. Asta implică $P - N = S = 11$. Cum $P + N = 28$, obținem prin însumare $2P = 39$, adică $P = \dfrac{39}{2} \notin \mathbb{Z}$, deci cazul acesta nu are soluții.
- Cazul $S = 0$. Din $P - N = S = 0$ avem $P = N$ și cum $P + N = 28$ obținem $P = N = 14$. Găsim toate grupele formate din 3 cifre de la 1 până la 7 care au suma 14 și vedem că acestea sunt
$$(7, 6, 1), (7, 5, 2), (7, 4, 3), \text{ și } (6, 5, 3).$$
Celelalte 4 cifre vor fi cele care rămân după prima selecție, deci am avea exact 4 posibilități de a împărți cifrele ca să se respecte proprietatea. Pentru fiecare împărțire există $3 \times 2 \times 1 = 6$ variante de a permuta cele 3 cifre din N și $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ variante pentru cele din P și obținem $6 \times 24 = 144$ de numere pe care le putem genera dintr-o împărțire stabilită. Cum sunt 4 împărțiri distincte, obținem $4 \times 144 = 576$ de numere întregi de 7 cifre formate din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 care sunt divizibile cu 11.

Barem:

- Obține valorile maximă și minimă pentru suma S 1p
- Demonstrează că în cazul $S = 11$ nu există soluții 2p
- Determină distribuțiile cifrelor după paritatea poziției 3p
- Determină și justifică rezultatul final 1p

□

Problema 2

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor $AB, B'C'$, respectiv DD'.

a) Aflați cosinusul unghiului determinat de dreapta CM și planul (MNP).

b) Determinați punctele $I \in CM$ și $J \in PN$ pentru care $IJ \perp CM$ și $IJ \perp NP$.

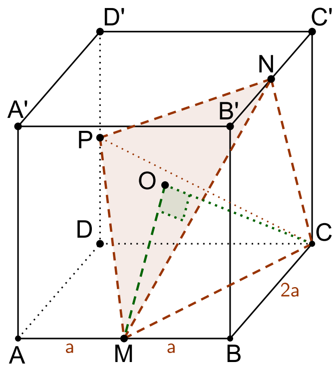
Demonstrație.

a) Vom nota $AB = 2a$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $\triangle BCM$ și obținem $CM^2 = CB^2 + BM^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 \iff CM = a\sqrt{5}$. În mod similar obținem și că $CN = CP = a\sqrt{5}$, deci piramida $CMNP$ are muchiile laterale congruente, deci perpendiculara din C pe planul (MNP) intersectează planul (MNP) în centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle MNP$.
Vom demonstra că triunghiul $\triangle MNP$ este echilateral. Asta se obține, fie din $\triangle BMN \equiv \triangle D'PN \equiv \triangle AMP$, fie aplicând teorema lui Pitagora în fiecare dintre cele 3 triunghiuri de mai sus. Din $MN^2 = BM^2 + BN^2$ obținem $MN = a\sqrt{6}$. Lungimile segmentelor (NP) și (PM) se calculează similar.
Prin urmare, centrul cercului circumscris triunghiului echilateral $\triangle MNP$, pe care îl notăm cu O, se află la distanța $\dfrac{MN\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{2}$ față de punctul M.

$$\left.\begin{array}{l} CO \perp (MNP) \\ O \in (MNP) \\ M \in (MNP) \end{array}\right\} \implies Pr_{(MNP)}(CM) = MO \implies \angle(CM, (MNP)) = \angle CMO.$$

În triunghiul $\triangle COM$, dreptunghic în O

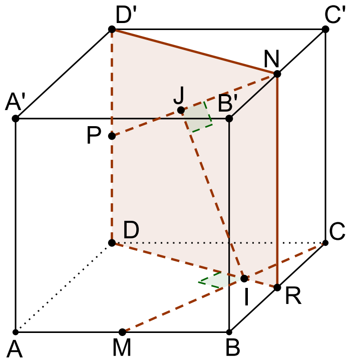
$$cos(\angle CMO) = \frac{OM}{CM} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$



b) Vom nota cu R mijlocul lui (BC) pentru a vedea secțiunea determinată de planul $(DD'N)$ în cub. Cum $DD' \parallel NR \implies$ punctele D, D', N, R sunt coplanare. Vom demonstra că $CM \perp DR$. Din $DC = CB$, $CR = BM$ și $m(\angle DCR) = m(\angle CBM) = 90° \implies \triangle DCR \equiv \triangle CBM \implies \angle CDR \equiv \angle BCM$. Dar $\angle CDR$ și $\angle DRC$ sunt complementare, deci și $\angle BCM$ și $\angle DRC$ sunt complementare, de unde $DR \perp CM$. Vom nota cu I punctul de intersecție al dreptelor DR și CM.

$$\left.\begin{array}{l} CI \perp DR \\ CI \perp DD' \\ DR, DD' \subset (DD'N) \\ DR \cap DD' = \{D\} \end{array}\right\} \implies CI \perp (DD'N).$$

În planul $(DD'N)$ construim $IJ \perp PN$, $J \in PN$. Aceasta este perpendiculara comună a dreptelor CM și PN. Perpendicularitatea pe PN e clară din construcție, iar pe CM din faptul că $CM \perp (DD'N)$ în care este inclusă și dreapta IJ.



Barem:

- Demonstrează că proiecția lui C pe planul (MNP) este centrul cercului circumscris $\triangle MNP$ . . . 1p
- Obține $cos = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ . . . 1p
- Demonstrează $CM \perp (DD'N)$ . . . 2p
- Construiește $IJ \perp PN$ . . . 2p
- Justifică faptul că IJ este perpendiculara comună . . . 1p

□

Problema 3

Se consideră numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ cu proprietatea $abc = 8$. Arătați că

$$\frac{1}{ab+2a+8} + \frac{1}{bc+2b+8} + \frac{1}{ca+2c+8} \le \frac{3}{16}.$$

Mihaela Berindeanu

Demonstrație.

Vom aplica inegalitatea $\dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \iff \dfrac{x+y}{2} \ge \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$, adică $m_a \ge m_h$.

$$\frac{1}{ab+2a+8} = \frac{1}{(ab+4)+(2a+4)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+4} + \frac{1}{2a+4}\right)$$

și cum $ab = \dfrac{8}{c} \implies$

$$\frac{1}{ab+2a+8} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c}{4c+8} + \frac{1}{2a+4}\right) \qquad (1)$$

Analog, obținem

$$\frac{1}{bc+2b+8} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a}{4a+8} + \frac{1}{2b+4}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{ac+2c+8} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b}{4b+8} + \frac{1}{2c+4}\right) \qquad (3)$$

Suma (1) + (2) + (3) este:

$$\frac{1}{ab+2a+8}+\frac{1}{bc+2b+8}+\frac{1}{ca+2c+8}\le$$

$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{4c+8}+\frac{1}{2a+4}+\frac{a}{4a+8}+\frac{1}{2b+4}+\frac{b}{4b+8}+\frac{1}{2c+4}\right)\iff$$

$$\frac{1}{ab+2a+8}+\frac{1}{bc+2b+8}+\frac{1}{ca+2c+8}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a+2}{4(a+2)}+\frac{b+2}{4(b+2)}+\frac{c+2}{4(c+2)}\right)\iff$$

$$\frac{1}{ab+2a+8}+\frac{1}{bc+2b+8}+\frac{1}{ca+2c+8}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\iff$$

$$\frac{1}{ab+2a+8}+\frac{1}{bc+2b+8}+\frac{1}{ca+2c+8}\le\frac{3}{16}.$$

Cazul de egalitate are loc pentru $a=b=c=2\implies\dfrac{1}{ab+2a+8}+\dfrac{1}{bc+2b+8}+\dfrac{1}{ca+2c+8}=$
$=3\cdot\dfrac{1}{4+4+8}=\dfrac{3}{16}$.

Barem:

- Aplică inegalitatea $\dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ .... $3p$
- Substituie $ab=\dfrac{8}{c}$ .... $3p$
- Adună relațiile și finalizează .... $1p$

$\square$

Problema 4

Fie $n=\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}$ un număr natural cu k cifre. Definim $T(n)$ astfel:

- Dacă k este par, atunci $T(n)=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}\cdots+\overline{a_{k-1}a_k}$.
- Dacă k este impar, atunci $T(n)=a_1+\overline{a_2a_3}\cdots+\overline{a_{k-1}a_k}$.

De exemplu, $T(123)=1+23=24$ și $T(2021)=20+21=41$.
Demonstrați că:

a) $99\mid T(99\cdot n)$, oricare ar fi n un număr natural;

b) printre oricare 198 numere întregi pozitive consecutive cel mult egale cu 2000000 există cel puțin unul astfel încât $T(n)\mid n$.

Olimpiadă Mexic

Demonstrație.
a) Vom demonstra că $T(99n)$ se divide cu 9 și cu 11, cum $(9,11)=1$ rezultă concluzia.

i) Fie $99n=\overline{a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k}$, unde k este număr par.

$$T(99n)=\overline{a_1a_2}+\overline{a_3a_4}+\cdots+\overline{a_{k-1}a_k}=10\left(a_1+a_3+\cdots+a_{k-1}\right)+\left(a_2+a_4+\cdots+a_k\right).$$

- *Divizibilitatea cu 11*

$$11 \mid 99n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} \iff$$

$$11 \mid -(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_k) \iff$$

$$11 \mid -11(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) + 10(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_k) \iff$$

$$11 \mid -11(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) + T(99n) \iff 11 \mid T(99n).$$

- *Divizibilitatea cu 9*

$$9 \mid 99n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} \iff$$

$$9 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k \iff 9 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k + 9(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) \iff$$

$$9 \mid 10(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_k) \iff 9 \mid T(99n).$$

ii) Fie $99n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}$, unde k este număr impar.

$$T(99n) = a_1 + \overline{a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5} + \dots + \overline{a_{k-1} a_k} = 10(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) + (a_1 + a_3 + \dots + a_k).$$

- *Divizibilitatea cu 11*

$$11 \mid 99n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} \iff$$

$$11 \mid -(a_1 + a_3 + \dots + a_k) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) \iff$$

$$11 \mid -(a_1 + a_3 + \dots + a_k) - 10(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) + 11(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) \iff$$

$$11 \mid 11(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) - T(99n) \iff 11 \mid T(99n).$$

- *Divizibilitatea cu 9*

$$9 \mid 99n = \overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} \iff$$

$$9 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k \iff 9 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_k + 9(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) \iff$$

$$9 \mid 10(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-1}) + (a_1 + a_3 + \dots + a_k) \iff 9 \mid T(99n).$$

Asta încheie demonstrația.

b) Ne vom uita la numerele mai mici decât 2.000.000 care sunt multipli de 99, adică la numerele $n = 99p$. Conform punctului *a*), în aceste cazuri, $T(n)$ este un multiplu al lui 99, iar cea mai mare valoare a lui $T(n)$ se obține pentru numerele $999.999,\ 1.989.999,\ 1.999.899$ și $1.999.998$. Așadar $T(n) \in \{99,\ 2 \cdot 99,\ 3 \cdot 99\}$. Din 198 de numere întregi consecutive există un număr care să fie divizibil cu $198 = 2 \cdot 99$, deci am avea un număr par divizibil cu 99. Dacă $T(n)$ este 99 sau $2 \cdot 99$, problema este gata din afirmația anterioară,

$$T(n) \mid 198 \text{ și } 198 \mid n \implies T(n) \mid n.$$

Altfel, mai avem de analizat cazul când $T(n) = 3 \cdot 99$, caz în care n poate lua doar valorile $999.999,\ 1.989.999,\ 1.999.899$ și $1.999.998$.

- Numerele $a = 1.989.999$ și $b = 1.999.899$ nu sunt divizibile cu $99 \cdot 3$, sunt impare, deci nu se divid nici cu $99 \cdot 2$, așadar, dacă unul dintre cele 198 de numere selectate este a sau b, atunci printre ele mai există unul par divizibil cu 99. În cazul alegerii lui a îl găsim cu siguranță și pe 1.989.900 sau pe 1.990.098, care verifică cerința, iar în cazul alegerii lui b mai găsim pe 1.999.899 sau pe 1.999.998, soluții ale problemei;

- $999.999 = 99 \cdot 3 \cdot 3.367$, $T(999.999) = 99 \cdot 3 \implies T(n) \mid n$;

- $n = 1.999.998 = 99 \cdot 3 \cdot 6734$, $T(1.999.998) = 3 \cdot 99 \implies T(n) \mid n$.

Barem:

- Demonstrează $T(99n) \vdots 11$ . . . 1p
- Demonstrează $T(99n) \vdots 9$ . . . 1p
- Afirmă că între 198 numere consecutive există două care sunt divizibile cu 99 . . . 1p
- Afirmă că $T(n)$ este 99 sau $2 \cdot 99$ în acest caz . . . 1p
- Analizează cazurile $T(n) = 99$ sau $2 \cdot 99$ . . . 1p
- Analizează cazul $T(n) = 3 \cdot 99$ . . . 2p

□

Problemele 1-4: . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . $0p$
Total: . . . $28p$

Timp de lucru: . . . 4 ore