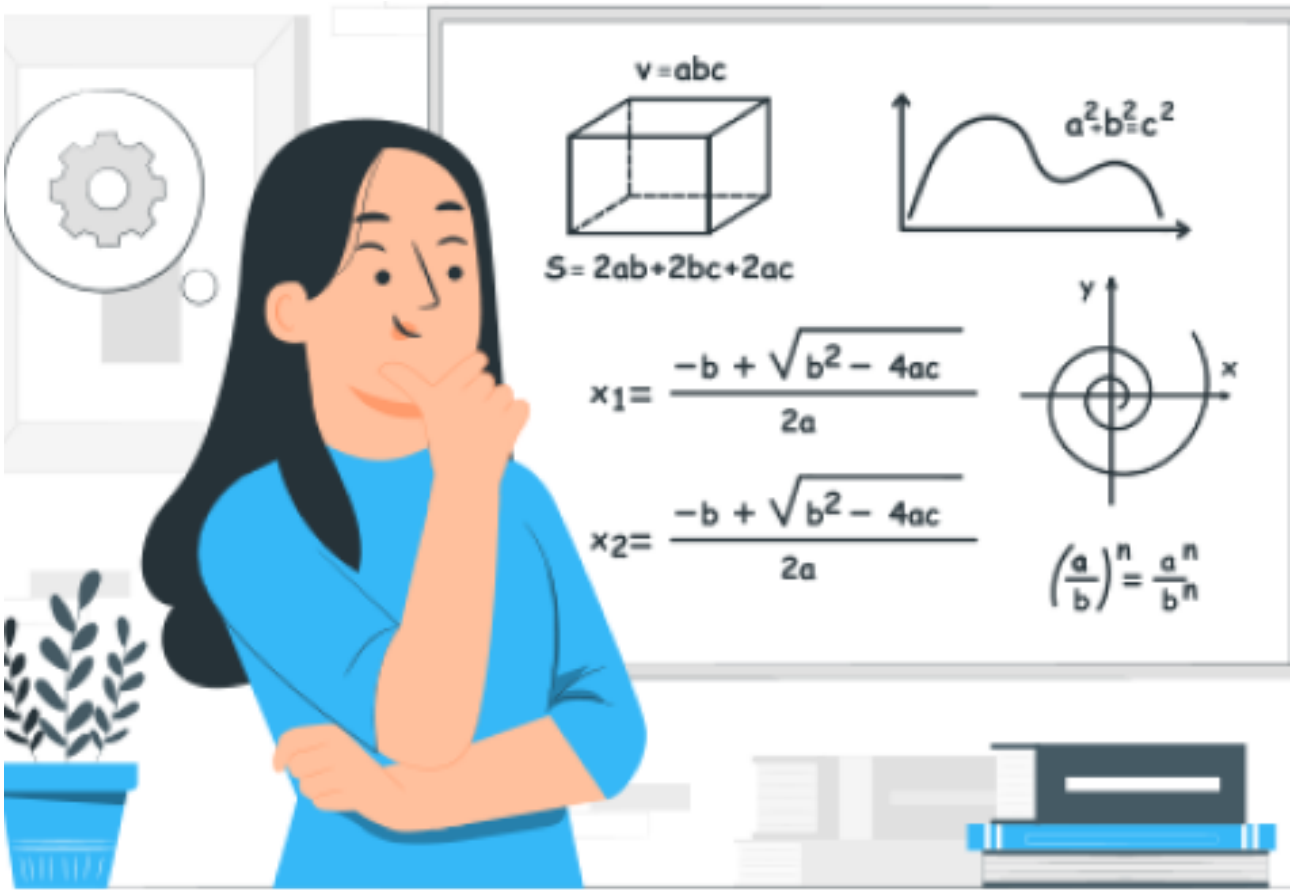

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2023-2024

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Subiecte -

Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 formăm toate numerele de 7 cifre distincte. Câte dintre acestea sunt divizibile cu 11?

Problema 2

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor $AB, B'C'$, respectiv DD'.

a) Aflați cosinusul unghiului determinat de dreapta CM și planul (MNP).

b) Determinați punctele $I \in CM$ și $J \in PN$ pentru care $IJ \perp CM$ și $IJ \perp NP$.

Problema 3

Se consideră numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ cu proprietatea $abc = 8$. Arătați că

$$\frac{1}{ab+2a+8} + \frac{1}{bc+2b+8} + \frac{1}{ca+2c+8} \leq \frac{3}{16}.$$

Mihaela Berindeanu

Problema 4

Fie $n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k}$ un număr natural cu k cifre. Definim $T(n)$ astfel:

- Dacă k este par, atunci $T(n) = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$.
- Dacă k este impar, atunci $T(n) = a_1 + \overline{a_2 a_3} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$.

De exemplu, $T(123) = 1 + 23 = 24$ și $T(2021) = 20 + 21 = 41$.
Demonstrați că:

a) $99 \mid T(99 \cdot n)$, oricare ar fi n un număr natural;

b) printre oricare 198 numere întregi pozitive consecutive cel mult egale cu 2000000 există cel puțin unul astfel încât $T(n) \mid n$.

Olimpiadă Mexic

Problemele 1-4: ..... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: ..... $0p$
Total: ..... $28p$

Timp de lucru: ..... 4 ore