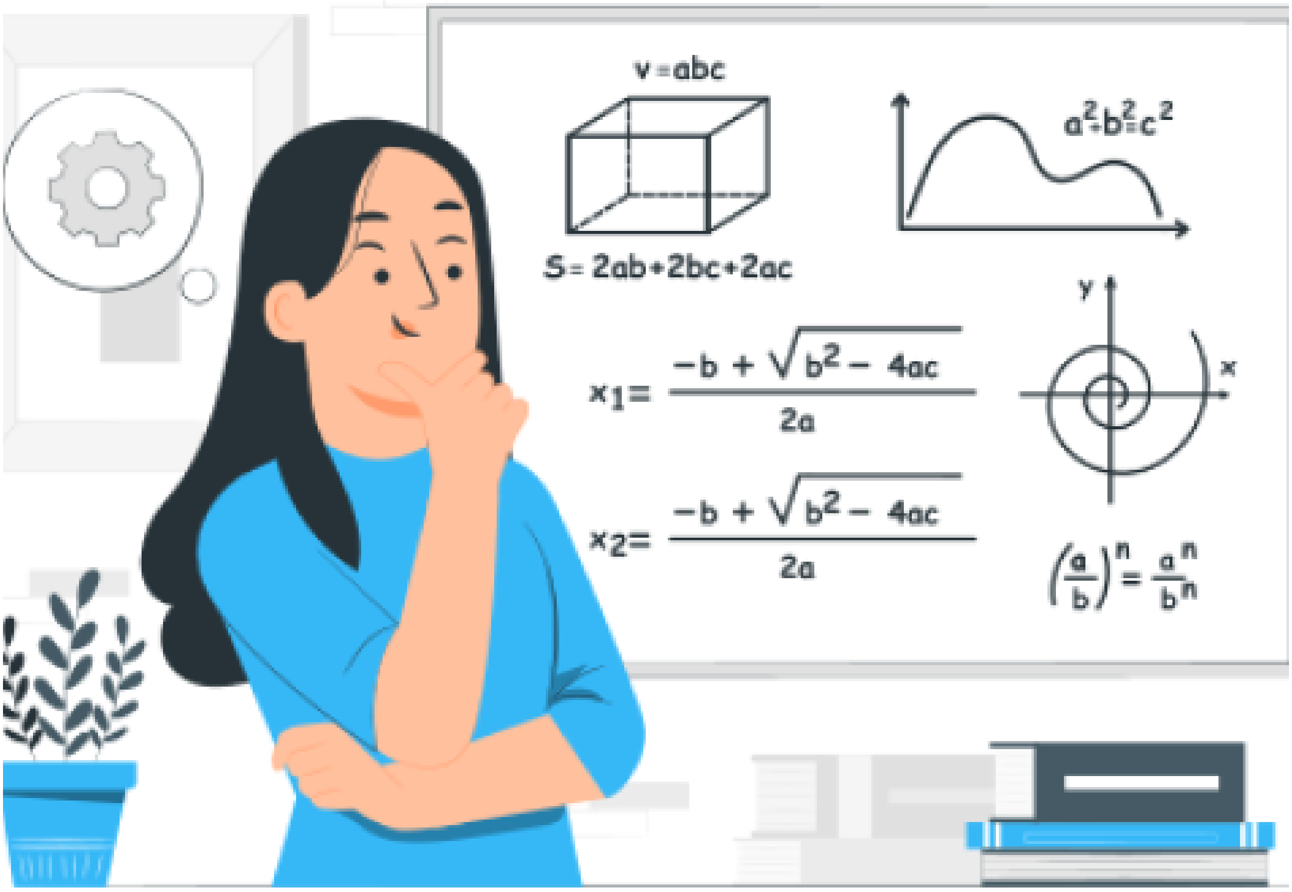


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa I
Clasa a V-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Marius Mîinea

§1 Soluții

Problema 1

Care este rezultatul următorului calcul?

$$10 + 20 + 30 + 40 + \ldots + 2000 - 8 - 16 - 24 - 32 - \ldots - 1600$$

a) 20100 b) 80400 c) 40200 d) 50500

Demonstrație. Numerele care se adună sunt din 10 în 10 și se pot rescrie $10 \cdot 1$, $10 \cdot 2$, $10 \cdot 3, \ldots,$ $10 \cdot 200$, deci sunt 200 astfel de numere. Numerele care se scad sunt din 8 în 8 și se pot rescrie $8 \cdot 1$, $8 \cdot 2$, $8 \cdot 3, \ldots,$ $8 \cdot 200$, deci sunt tot 200 de numere. Am putea să calculăm suma primelor 200 de numere, apoi suma celor 200 de numere care se scad și apoi să efectuăm diferența, dar, pentru că numerele care se adună sunt la fel de multe ca și cele care se scad, le putem grupa în perechi, astfel:

$$(10 - 8) + (20 - 16) + (30 - 24) + (40 - 32) + \ldots + (2000 - 1600) =$$

$$= 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 400 =$$

$$= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 200) =$$

$$= 2 \cdot 201 \cdot 200 : 2 =$$

$$= \boxed{40200}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Care este valoarea numărului natural x care verifică relația

$$5 \cdot x + 10 \cdot x + 15 \cdot x + \ldots + 500 \cdot x = 50500?$$

a) 2 b) 20 c) 5 d) 1

Demonstrație.

$$5 \cdot x + 10 \cdot x + 15 \cdot x + \ldots + 500 \cdot x = 50500 \iff$$

$$\iff x \cdot (5 + 10 + 15 + \ldots + 500) = 50500 \iff$$

$$\iff x \cdot ((5 + 500) \cdot 100 : 2) = 50500 \iff$$

$$\iff x \cdot 50500 : 2 = 50500 \iff$$

$$\boxed{x = 2}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

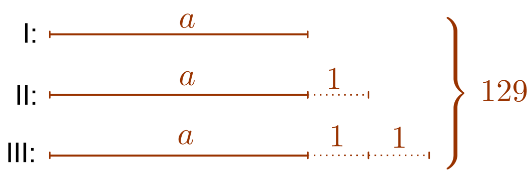
□

Problema 3

Suma a trei numere naturale consecutive se împarte la 17 și se obține câtul 7 și restul 10. Care este cel mai mare dintre cele trei numere consecutive?

a) 41 b) 42 c) 43 d) 44

Demonstrație. segmente
Suma celor trei numere este egală cu $17 \cdot 7 + 10 = 129$.



Din suma lor se scad cele trei părți egale cu 1 și obținem $129 - 3 = 126$. Acest număr reprezintă suma celor trei segmente egale, deci fiecare este egal cu $126 : 3 = 42$. Cel mai mic dintre cele 3 numere este 42, iar cel mare dintre ele este egal cu $\boxed{44}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

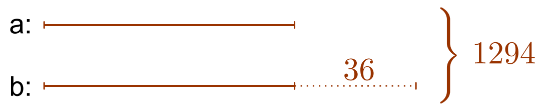
□

Problema 4

Un număr natural este cu 36 mai mare decât altul. Împărțind suma acestor două numere la diferența lor se obține câtul 35 și restul 34. Care este valoarea numărului mai mare?

a) 665 b) 672 c) 629 d) 600

Demonstrație. Diferența celor două numere este 36. Suma acestora se împarte la 36 și se obține câtul 35 și restul 34, deci suma este egală cu $36 \cdot 35 + 34 = 1294$.



Suma celor două segmente egale este $1294 - 36 = 1258$. Numărul mai mic este $1258 : 2 = 629$. Numărul mai mare este egal cu $629 + 36 = \boxed{665}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 5

Care este valoarea numărului $x + y$, știind că $3^x = 81$ și $5^y = 125$?

a) 52 b) 6 c) 7 d) 100

Demonstrație. Din $3^x = 81$ obținem $x = 4$, iar din $5^y = 125$ rezultă $y = 3$. De aici avem că $x + y = \boxed{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 6

Dacă a este cea mai mare cifră pară și $b + c = 100$, aflați care este valoarea expresiei

$$a \cdot b + a \cdot c + 5 \cdot b + 5 \cdot c.$$

a) 1300 b) 800 c) 900 d) 1200

Demonstrație. Cea mai mare cifră pară este 8.
$a \cdot b + a \cdot c + 5 \cdot b + 5 \cdot c = a \cdot (b + c) + 5 \cdot (b + c) = 8 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 800 + 500 = \boxed{1300}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Care este suma cifrelor celui mai mare număr natural de 3 cifre care dă restul 10 la împărțirea prin 19?

a) 15 b) 16 c) 26 d) 27

Demonstrație. Mai întâi aflăm restul împărțirii celui mai mare număr de 3 cifre, adică 999, la 19. Avem astfel că $999 = 19 \cdot 52 + 11$. Pentru a afla cel mai mare număr natural de 3 cifre care dă restul 10 la împărțirea prin 19 trebuie să scădem un 1 din egalitatea de nai sus și observăm că $998 = 19 \cdot 52 + 10$. Numărul căutat este 998, iar suma cifrelor acestuia este $9 + 9 + 8 = \boxed{26}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Câte dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte?

$$A = 9^{15}$$

$$B = 2^{197} + 2^{194}$$

$$C = 1111111110$$

$$D = 121$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 0

Demonstrație.

- $A = 9^{15} = \left(3^2\right)^{15} = 3^{2 \cdot 15} = \left(3^{15}\right)^2$, deci A este pătrat perfect;
- $B = 2^{197} + 2^{194} = 2^{194} \cdot (2^3 + 1) = 2^{97 \cdot 2} \cdot 9 = \left(2^{97}\right)^2 \cdot 3^2 = \left(2^{97} \cdot 3\right)^2$, deci B este pătrat perfect;
- $C = 1111111110$ nu este pătrat perfect pentru că se termină într-o singură cifră de 0;
- $D = 121 = 11^2$, deci D este pătrat perfect.

În concluzie, numerele A, B și D sunt pătrate perfecte, iar C nu este pătrat perfect. Dintre cele 4 numere, numărul pătratelor perfecte este egal cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Care este produsul tuturor cifrelor utilizate la scrierea numerelor naturale?

a) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ b) 1256000 c) 2456000 d) 0

Demonstrație. Dacă v-ați păcălit la această problemă, cel puțin ați învățat ceva important. Cifrele folosite pentru a scrie numerele naturale sunt de la 0 la 9. Dacă vrem să excludem cifra 0, atunci vom vorbi despre **cifre nenule**. Totuși, atunci când calculăm produsul **tuturor** cifrelor, inclusiv 0, obținem:

$$0\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=\boxed{0}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Aflați numărul de două cifre $\overline{ab}$, știind că

$$12+12\cdot3+12\cdot5+\cdots+12\cdot23=\left(\overline{ab}+1\right)^3.$$

a) 12 b) 11 c) 13 d) 9

Demonstrație.

$12+12\cdot3+12\cdot5+\cdots+12\cdot23=\left(\overline{ab}+1\right)^3 \iff 12\cdot(1+3+5+\ldots+23)=\left(\overline{ab}+1\right)^3 \iff$
$\iff 12\cdot24\cdot12:2=\left(\overline{ab}+1\right)^3 \iff 12^3=\left(\overline{ab}+1\right)^3 \iff 12=\overline{ab}+1 \iff \boxed{\overline{ab}=11}.$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 11

Se consideră numerele $a=(2^{98}+2^{102})\cdot(5^{99}+5^{101})$ și $b=(2^{99}+2^{101})\cdot(5^{98}+5^{102})$. Care este suma cifrelor numărului $a+b$?

a) 11 b) 101 c) 28 d) 19

Demonstrație. Vom rescrie fiecare număr în cea mai simplă variantă, dând factor comun în fiecare paranteză puterea cu cel mai mic exponent.

- $a=(2^{98}+2^{102})\cdot(5^{99}+5^{101})=2^{98}\cdot(1+2^4)\cdot5^{99}(1+5^2)=(1+16)\cdot(1+25)\cdot2^{98}\cdot5^{99}=$
$=17\cdot26\cdot5\cdot2^{98}\cdot5^{98}=2210\cdot10^{98}=221\underbrace{000\ldots0}_{99\text{ cifre}}$
- $b=(2^{99}+2^{101})\cdot(5^{98}+5^{102})=2^{99}\cdot(1+2^2)\cdot5^{98}\cdot(1+5^4)=(1+4)\cdot(1+625)\cdot2^{99}\cdot5^{98}=$
$=5\cdot626\cdot2\cdot2^{98}\cdot5^{98}=626\cdot10^{99}=626\underbrace{000\ldots0}_{99\text{ cifre}}$

În final, $a + b = 221\underbrace{000\ldots0}_{99 \text{ cifre}} + 626\underbrace{000\ldots0}_{99 \text{ cifre}} = 847\underbrace{000\ldots0}_{99 \text{ cifre}}$. Suma cifrelor numărului $a + b$ este egală cu $\boxed{19}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

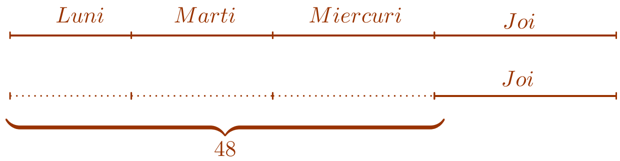
Problema 12

În primele 4 zile ale acestei săptămâni, Bianca lucrează suplimentar la matematică pentru a se pregăti pentru olimpiada de matematică. În fiecare zi, începând cu marți, ea lucrează cu câte două probleme mai mult față de ziua precedentă, iar în cele patru zile a lucrat în total cu 48 de probleme mai mult față decât a lucrat joi. Câte probleme a lucrat Bianca miercuri?

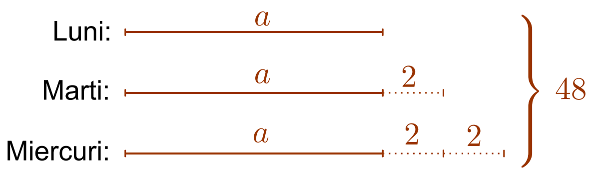
a) 13 b) 15 c) 16 d) 18

Demonstrație. segmente

În cele patru zile a lucrat în total cu 48 de probleme mai mult față decât a lucrat joi, asta înseamnă că în zilele de luni, marți și miercuri Bianca a lucrat 48 de probleme.



Din suma totală scădem valoarea celor 3 segmente egale cu 2 și obținem $48 - 2 \cdot 3 = 42$.



Sunt 3 părți egale, deci fiecare parte este egală cu $42 : 3 = 14$. Adică, luni a lucrat 14 probleme, a doua zi cu două mai mult, adică 16, iar miercuri cu încă două în plus. Numărul de probleme pe care le-a lucrat Bianca miercuri este egal cu $\boxed{18}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 13

Andrei observă că suma numerelor mai mici decât numărul natural n, care reprezintă vârsta sa, nu este mai mică decât 55, iar suma acestora adunată cu n nu depășește 66. Care este vârsta lui Andrei?

a) 11 b) 10 c) 12 d) 9

Demonstrație. Numerele naturale mai mici decât numărul n sunt $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Suma acestora nu este mai mică decât 55, înseamnă că suma lor este cel puțin 55. Dacă la această sumă îl mai adăugăm și pe n, noua sumă nu depășește 66, deci este mai mică sau egală decât 66. Suma $1+2+3+\cdots+n$ este mai mare strict decât 55 pentru că la suma $1+2+3+\cdots+(n-1)$, care este cel puțin 55, îl adăugăm și pe n, iar n nu poate fi egal cu 0. Știm să calculăm primele sume Gauss și cunoaștem că $1+2+3+\ldots+10=55$. Adăugând la această sumă 11, obținem exact 66, deci $n=11$. Vârsta lui Andrei este egală cu $\boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 14

Care este cea mai mică valoare a numărului natural nenul n pentru care numărul

$$A=2^{2\cdot n+7}\cdot 7^n:14^3$$

este pătrat perfect?

a) 4 b) 2 c) 3 d) 5

Demonstrație. $A=2^{2\cdot n+7}\cdot 7^n:14^3=2^{2\cdot n+7}\cdot 7^n:(2\cdot 7)^3=2^{2\cdot n+7}\cdot 7^n:(2^3\cdot 7^3)=2^{2\cdot n+4}\cdot 7^{n-3}$. Ca acest număr să fie pătrat perfect, în primul rând trebuie să fie număr natural, adică exponentul lui 7 trebuie să fie cel puțin egal cu 0 și asta se întâmplă pentru $n\geq 3$. În acest caz obținem $A=2^{2\cdot 3+7}\cdot 7^3:14^3=2^{2\cdot 3+4}\cdot 7^{3-3}=2^{10}=(2^5)^2=32^2$, care este pătrat perfect. Cea mai mică valoare a numărului natural nenul n pentru care numărul A este pătrat perfect este egală cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 15

Se consideră numerele naturale nenule a, b, c și d. Împărțind numărul a la numărul b, numărul b la numărul c, numărul c la numărul d se obține de fiecare dată câtul egal cu 3 și restul egal cu 3. Aflați restul împărțirii numărului $a+b+c+d$ la 20.

a) 54 b) 3 c) 14 d) 0

Demonstrație. Vom scrie Teorema împărțirii cu rest (sau proba împărțirii) pentru toate cele trei împărțiri și vom proceda în așa fel încât să scriem toate cele patru numere cu ajutorul unui singur număr.

$$a=3\cdot b+3,\ \ 3<b,\ \ (1)$$

$$b=3\cdot c+3,\ \ 3<c,\ \ (2)$$

$$c=3\cdot d+3,\ \ 3<d,\ \ (3)$$

Facem înlocuirile în ordine inversă, plecăm de jos în sus:

- $b=3\cdot c+3=3\cdot(3\cdot d+3)+3=9\cdot d+9+3=9\cdot d+12$;
- $a=3\cdot b+3=3\cdot(9\cdot d+12)+3=27\cdot d+36+3=27\cdot d+39$.

Înlocuim fiecare număr în funcție de d și obținem $a+b+c+d=27\cdot d+39+9\cdot d+12+3\cdot d+3+d=40\cdot d+54=40\cdot d+40+14=20\cdot 2\cdot d+20\cdot 2+14=20\cdot(2\cdot d+2)+14$.
Restul împărțirii numărului $a+b+c+d$ la 20 este $\boxed{14}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 16

La ora de desen, Andrei a copiat următorul model care este format din figuri geometrice, triunghiuri și pătrate:

$$\triangle,\ \square,\ \triangle,\ \square,\ \square,\ \triangle,\ \square,\ \square,\ \square,\ \triangle,\ \square,\ \square,\ \square,\ \square, \ldots$$

Dacă Andrei a desenat 54 de figuri, câte laturi a desenat în total?

a) 200 b) 210 c) 207 d) 250

Demonstrație. Andrei desenează un triunghi și un pătrat, un triunghi și două pătrate, un triunghi și trei pătrate, etc. Vom număra figurile formând grupe care încep cu un triunghi și pătratele desenate după acest triunghi până la următorul triunghi. Astfel, în prima grupă avem două figuri geometrice, în a doua grupă avem 3 figuri geometrice, în următoarea sunt 4 figuri geometrice și așa mai departe. Suma începe de la 2 și este de forma $2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$. Știm că suma primelor 10 numere naturale nenule este 55, de unde rezultă că ultima grupă desenată de Andrei este formată din 10 figuri geometrice pentru că începem de la 2, adică exact $55 - 1 = 54$. Sunt 9 grupe, deci 9 triunghiuri pentru care a desenat $9 \cdot 3 = 27$ de laturi. Numărul de pătrate este $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, așadar numărul de laturi desenate este $45 \cdot 4 = 180$. Numărul total de laturi pe care le-a desenat Andrei este egal cu $27 + 180 = \boxed{207}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

$\square$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore