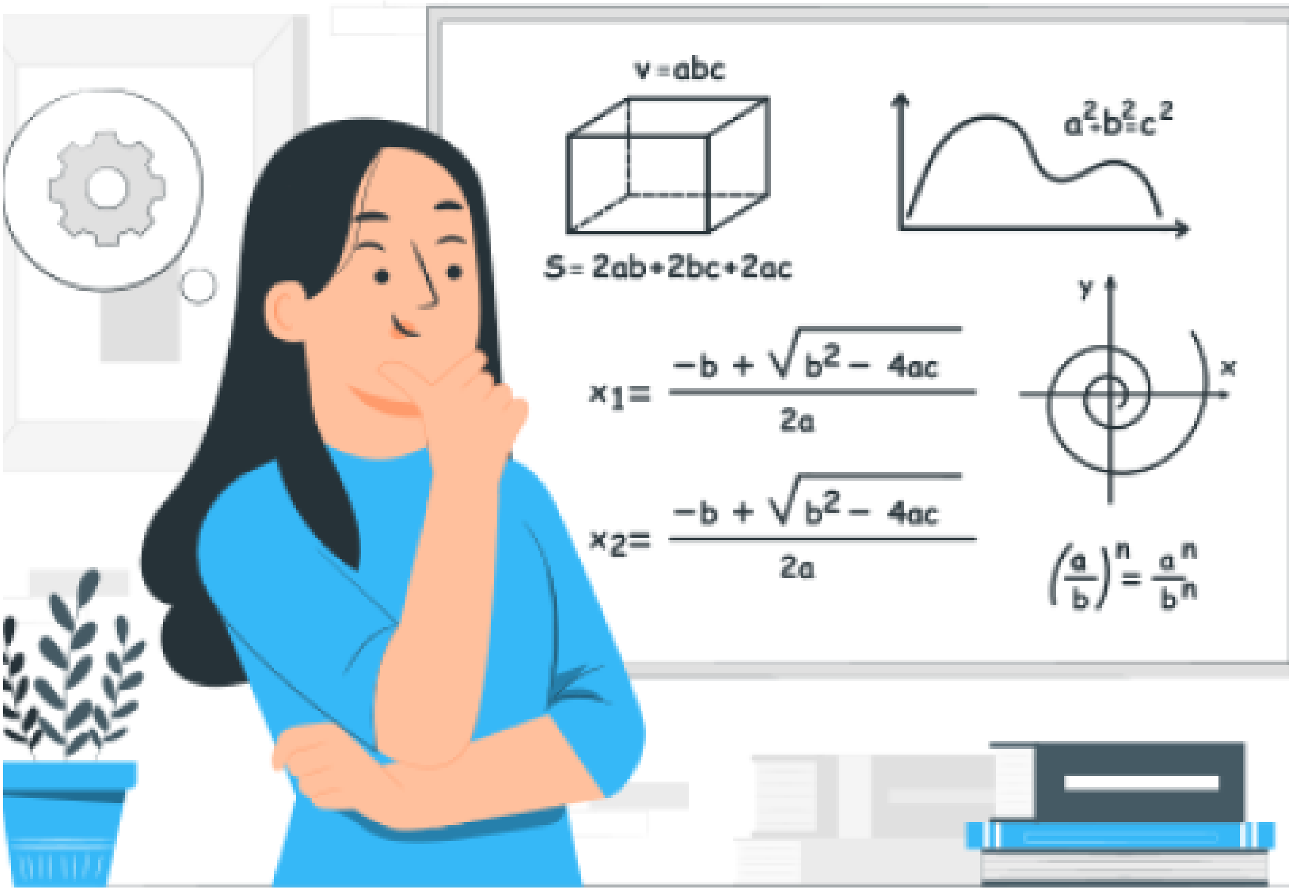


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa I
Clasa a VII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

§1 Soluții

Problema 1

Știind că $a \cdot c = -5$ și $b = -6$, calculați $(-4a) \cdot (-b) \cdot (-2c)$.

a) 30 b) -120 c) 240 d) -240

Demonstrație. $(-4a) \cdot (-b) \cdot (-2c) = (-4) \cdot a \cdot b \cdot 2 \cdot c = (-8) \cdot (-6) \cdot a \cdot c =$
$= 48 \cdot (-5) = \boxed{-240}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele a, b și $a+b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Care este măsura celui mai mare unghi al triunghiului?

a) $80°$ b) $90°$ c) $120°$ d) $150°$

Demonstrație.

Fie $\triangle ABC$ în care unghiul $\angle A$ este unghiul de măsură mai mare. Atunci

$$\frac{\angle B}{a} = \frac{\angle C}{b} = \frac{\angle A}{a+b} = \frac{\angle B + \angle C + \angle A}{a+b+a+b} = \frac{180°}{2a+2b} = \frac{90°}{a+b}.$$

Din egalitatea dintre a treia și ultima fracție obținem că $\angle A = 90°$, deci unghiurile $\angle B$ și $\angle C$ sunt unghiuri ascuțite, prin urmare, unghiul de măsură mai mare are măsura de $\boxed{90°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

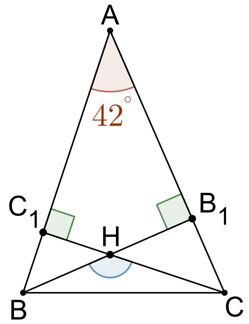
□

Problema 3

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ cu măsura unghiului $\angle BAC = 42°$ vom nota cu H ortocentrul triunghiului. Măsura unghiului $\angle BHC$ este egală cu:

a) $128°$ b) $118°$ c) $138°$ d) $48°$

Demonstrație. Notăm cu B_1 piciorul perpendicularei din B pe latura AC și cu C_1 piciorul perpendicularei din C pe AB.



În patrulaterul AC_1HB_1 unghiurile C_1 și B_1 sunt drepte, deci $\angle A + \angle C_1HB_1 = 180^\circ \iff \angle C_1HB_1 = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$. Pe de altă parte, $\angle BHC \equiv \angle B_1HC_1 \implies$ măsura unghiului $\angle BHC = \boxed{138^\circ}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

Dacă $x^2 = 49$ și $y^2 = 64$, aflați cea mai mică valoare posibilă a diferenței $x - y$.

a) -1 b) -113 c) -15 d) 1

Demonstrație. $x^2 = 49 \iff x \in \{-7, 7\}$, iar $y^2 = 64 \iff y \in \{-8, 8\}$. Calculăm pe rând diferențele și obținem $x - y = -7 - 8 = -15$, $x - y = -7 - (-8) = 1$, $x - y = 7 - 8 = -1$ și $x - y = 7 - (-8) = 15$. Cel mai mic dintre aceste patru numere este $\boxed{-15}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 5

Prețul unui tablou crește în fiecare an cu 10%. Dacă un tablou costa 3650 € la 31 decembrie 2023, cât va costa tabloul respectiv la data de 31 decembrie 2025?

a) $4512,3$ € b) $4450,2$ € c) $4416,5$ € d) $4425,6$ €

Demonstrație. După scumpirea din anul 2024, prețul tabloului va fi $3650 + \frac{10}{100} \cdot 3650 = 3650 + 365 = 4015$ €. După scumpirea din anul 2025, noul preț va fi $4015 + \frac{10}{100} \cdot 4015 = 4015 + 401,5 = \boxed{4416,5}$ €.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < |x| \leq n + 1\}$ are 20 de elemente.

a) 11 b) 10 c) 20 d) 22

Demonstrație. Elementele mulțimii A sunt $A = \{\pm 2, \pm 3, ..., \pm(n + 1)\}$. Cel mai mic element pozitiv al mulțimii A este 2 și cel mai mare element pozitiv este $n + 1$, deci sunt n elemente pozitive și tot atâtea negative. Cardinalul mulțimii A este $2n$, deci $2n = 20 \iff \boxed{n = 10}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Care este valoarea numărului n pentru care are loc egalitatea

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(1\frac{1}{2024}+1\frac{2}{2024}+1\frac{3}{2024}+\ldots+1\frac{2023}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}?$$

a) 2024 b) 6072 c) 6071 d) 2023

Demonstrație.

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(1\frac{1}{2024}+1\frac{2}{2024}+1\frac{3}{2024}+\ldots+1\frac{2023}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(1+\frac{1}{2024}+1+\frac{2}{2024}+1+\frac{3}{2024}+\ldots+1+\frac{2023}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(2023+\frac{1}{2024}+\frac{2}{2024}+\frac{3}{2024}+\ldots+\frac{2023}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(2023+\frac{1+2+3+\ldots+2023}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(2023+\frac{\frac{2023\cdot 2024}{2}}{2024}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot\left(2023+\frac{2023}{2}\right)=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$\frac{1}{2023}\cdot 2023+\frac{1}{2023}\cdot\frac{2023}{2}=\frac{n+1}{4048}$$

$$1+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{4048}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{n+1}{4048}\iff$$

$$n+1=\frac{3\cdot 4048}{2}\iff$$

$$\boxed{n=6071}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Știind că $x,\, y\in\mathbb{R}$, $0<x<2<y<5$, aflați valoarea numărului

$$\sqrt{(x-2y)^2}+\sqrt{(x+2y-16)^2}+\sqrt{4x^2}.$$

a) 16 b) 12 c) 2 d) 18

Demonstrație.

- $2 < y < 5 \iff 4 < 2y < 10$, de unde rezultă $x < 2 < 4 < 2y \implies x - 2y < 0 \implies |x - 2y| = 2y - x$.
- $\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 < 2y < 10 \end{cases} \implies x + 2y < 12 < 16 \implies |x + 2y - 16| = 16 - x - 2y;$
- $x > 0 \implies |2x| = 2x$.

Acum putem calcula valoarea expresiei $\sqrt{(x-2y)^2} + \sqrt{(x+2y-16)^2} + \sqrt{4x^2} = |x-2y| + |x+2y-16| + |2x| = 2y - x + 16 - x - 2y + 2x = \boxed{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

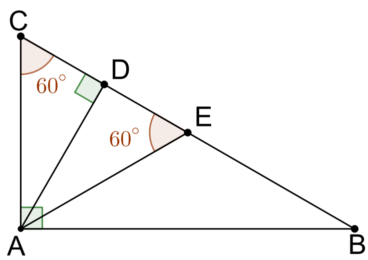
□

Problema 9

În triunghiul $\triangle ABC$, dreptunghic în A, se știe că AD este înălțime, AE este mediană, $D \in (CE)$, $m(\angle AED) = 60°$ și $BD = 12$ cm. Aflați lungimea laturii BC.

a) 8 cm b) 12 cm c) 16 cm d) 24 cm

Demonstrație.



AE este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $AE = BE = EC = \frac{1}{2}BC$. Deci $\triangle AEC$ isoscel cu $m(\angle E) = 60°$, adică echilateral. În $\triangle AEC$ echilateral, AD este înălțime, atunci AD este și mediană, deci D este mijlocul lui CE. Atunci $BD = BE + ED = BE + \frac{1}{2} \cdot CE = BE + \frac{1}{2} \cdot BE = \frac{3}{2} \cdot BE \iff 12 = \frac{3}{2} \cdot BE \iff BE = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$ cm.
Astfel, $BC = 2 \cdot BE = \boxed{16 \text{ cm}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Se consideră numărul

$$a = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \cdots + \sqrt{7^{2024}}}{56 + 8\sqrt{7}}.$$

Care este propoziția adevărată dintre următoarele?

a) $a \in \mathbb{N}$ b) $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ c) $a \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ d) $a \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$

Demonstrație.

$$a = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \cdots + \sqrt{7^{2024}}}{56 + 8\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}+7+7\sqrt{7}+7^2+7^2\sqrt{7}+\ldots+7^{1011}\sqrt{7}+7^{1012}}{8\cdot\left(7+\sqrt{7}\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{7}\cdot(1+7+7^2+\ldots+7^{1011})+7\cdot(1+7+7^2+\ldots+7^{1011})}{8\cdot\left(7+\sqrt{7}\right)} =$$
$$= \frac{\left(7+\sqrt{7}\right)\cdot(1+7+7^2+\ldots+7^{1011})}{8\cdot\left(7+\sqrt{7}\right)} =$$
$$= \frac{1+7+7^2+\ldots+7^{1011}}{8} =$$
$$= \frac{(1+7)+7^2\cdot(1+7)+7^4\cdot(1+7)+\cdots+7^{1010}\cdot(1+7)}{8} =$$
$$= \frac{8\cdot(1+7^2+7^4+\ldots+7^{1010})}{8} =$$
$$= 1+7^2+7^4+\ldots+7^{1010} \in \mathbb{N}.$$

Afirmația corectă este $\boxed{a \in \mathbb{N}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 11

Fie mulțimea $A = \{1, 2, ..., 10\}$. Aflați numărul submulțimilor M cu trei elemente ale mulțimii A care au proprietatea că, oricum am alege două elemente x și y din M, $x \neq y$, atunci suma sau modulul diferenței acestor două numere este element al mulțimii M diferit de x și de y.

a) 20 b) 30 c) 45 d) 60

Demonstrație. Vom rezolva o problemă mai generală mai întâi, vom considera cazul în care mulțimea A are cardinalul n, $n \in \mathbb{N}^*$.
Fie $M = \{a, b, c\}$ o astfel de submulțime cu $a < b < c$. Pentru că $a,\ b \in \mathbb{N}^* \implies c + a > c$, $c + b > c \implies c + a$ și $c + b$ nu fac parte din mulțime. Conform cerinței, rezultă că $c - a \in M$ și $c - b \in M$ și $c - b < c - a < c$, adică acestea sunt toate elementele mulțimii M, cel mai mic fiind $a = c - b$ și atunci $M = \{a, b, a + b\}$ cu $a, b \in A,\ a < b,\ a + b \leq n$.

a) Dacă n este par, avem variantele:
- $a = 1$, $b \in \{2, 3, ..., n - 1\}$;
- $a = 2$, $b \in \{3, 4, ..., n - 2\}$;

  ......
- $a = \dfrac{n}{2} - 1$, $b \in \left\{\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2} + 1\right\}$.

Pentru n par există, deci, $(n - 2) + (n - 4) + ... + 2 = \dfrac{n(n - 2)}{4}$ submulțimi în M.

b) Dacă n este impar, avem variantele:
- $a = 1$, $b \in \{2, 3, ..., n - 1\}$;
- $a = 2$, $b \in \{3, 4, ..., n - 2\}$;

  ......

- $a = \dfrac{n-1}{2}$, $b = \dfrac{n+1}{2}$.

Pentru n impar există, deci, $(n-2)+(n-4)+...+1 = \dfrac{(n-1)^2}{4}$ submulțimi în M.

Cum mulțimea A are un număr par de elemente rezultă că numărul de submulțimi care respectă cerința din ipoteză este $\dfrac{10 \cdot 8}{4} = \boxed{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Fie a, b, $c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{5}$ și $\dfrac{ab}{c} = 1$. Care este valoarea numărului $a = \sqrt{7a^2 + 8b^2 - c^2}$?

a) 2 b) $\dfrac{1}{15}$ c) $\dfrac{47}{15}$ d) 8

Demonstrație. Din $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{5}$ și $\dfrac{ab}{c} = 1$ rezultă că $a = 3bc$, $b = 5ac$ și $c = ab$. Prin înmulțirea acestor trei relații avem $abc = 15(abc)^2$. Cum $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, deducem că $abc = \dfrac{1}{15}$.

- $\dfrac{bc}{a} = \dfrac{1}{3} \iff a = 3bc \iff a^2 = 3abc \iff a^2 = \dfrac{1}{5}$;
- $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{1}{5} \iff b = 5ac \iff b^2 = 5abc \iff b^2 = \dfrac{1}{3}$;
- $\dfrac{ab}{c} = 1 \iff c = ab \iff c^2 = abc \iff c^2 = \dfrac{1}{15}$.

Obținem astfel $\sqrt{7a^2 + 8b^2 - c^2} = \sqrt{\dfrac{7}{5} + \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{15}} = \sqrt{\dfrac{60}{15}} = \boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

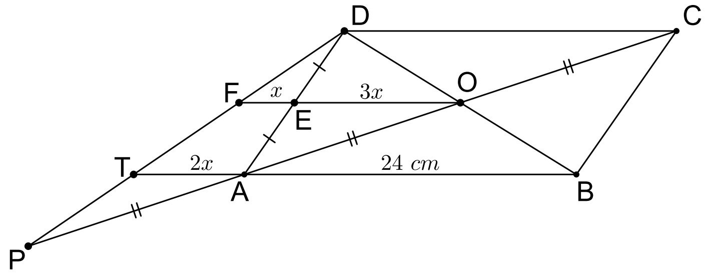
□

Problema 13

Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care O este punctul de intersecție al diagonalelor, punctul P este simetricul punctului O față de A, iar lungimea segmentului (AB) este 24 cm. Notăm cu E, respectiv F punctele de intersecție ale paralelei prin O la dreapta AB cu segmentele (AD), respectiv (PD). Lungimea segmentului (EF) este egală cu:

a) 6 cm b) 12 cm c) 4 cm d) 3 cm

Demonstrație. Vom nota cu T intersecția dreptei AB cu dreapta PD.



În triunghiul $\triangle ADT$ avem $AE = ED$, $EF \parallel AT \implies EF$ este linie mijlocie în $\triangle ADT \implies AT = 2 \cdot EF = 2x$.
Cum P este simetricul punctului O față de $A \implies PA = AO$, $AT \parallel OF \implies AT$ este linie mijlocie în $\triangle POF \implies OF = 2 \cdot AT = 4x$. De aici observăm că $EO = FO - FE = 3x$.
În $\triangle DAB$ segmentul (EO) este linie mijlocie pentru că $AE = ED$ și $BO = OD \implies EO = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12$ cm. Deci $3x = 12 \iff x = 4$ cm. Lungimea segmentului (EF) este egală cu $\boxed{4 \text{ cm}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

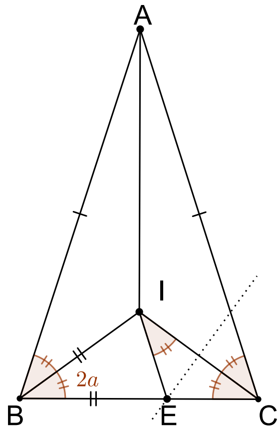
□

Problema 14

Se consideră triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Vom nota cu I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ și cu E intersecția mediatoarei segmentului (CI) cu dreapta BC. Știind că $BI = BE$, să se afle cu cât este egală suma măsurilor unghiurilor $\angle IBC$ și $\angle BAC$.

a) $72°$ b) $54°$ c) $80°$ d) $90°$

Demonstrație. Centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor, deci $(BI$ și $(CI$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$, respectiv $\angle ACB$.



Vom nota cu $2a$ măsura unghiului $\angle IBC$ pentru a evita calculele cu fracții (este un sfat, se greșește mai rar la calcule astfel). Cum $BI = BE \implies \triangle BIE$ este isoscel de bază (IE) și $\angle BIE = \angle BEI = 90° - a$. Pe de altă parte, E aparține mediatoarei segmentului $(IC) \implies EI = EC \implies \triangle EIC$ este isoscel de bază $(CI) \implies \angle EIC = \angle ECI = 2a$. De aici avem că $\angle BIC = \angle BIE + \angle EIC = 90° + a$. Pe de altă parte $\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - 4a$. Deci $180° - 4a = 90° + a \iff 5a = 90° \iff a = 18°$. Deci $\angle IBC = 36°$ și $\angle BAC = 180° - 2 \cdot \angle ABC = 36°$. Suma măsurilor unghiurilor $\angle IBC$ și $\angle BAC$ este egală cu $\boxed{72°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

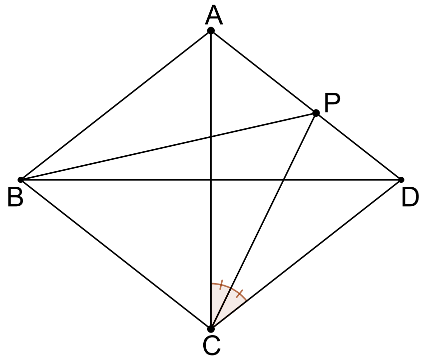
□

Problema 15

Se consideră rombul $ABCD$ în care construim bisectoarea unghiului $\angle ACD$ și notăm cu P intersecția acesteia cu dreapta AD. Raportul măsurilor unghiurilor $\angle BAD$ și $\angle ABC$ este egal cu $\frac{4}{3}$. Afirmația corectă este:

a) $ABCP$ este trapez dreptunghic
b) $\triangle BAC$ este echilateral
c) $AC = BP$
d) $AC \perp BP$

Demonstrație. Pentru că raportul unghiurilor $\angle BAD$ și $\angle ABC$ este $\frac{4}{3} \implies \angle BAD$ este unghiul de măsură mai mare.



Unghiurile opuse într-un romb sunt congruente, deci $\angle BAD \equiv \angle BCD$. Din ipoteză știm că $\frac{\angle BAD}{4} = \frac{\angle ABC}{3} = \frac{\angle BAD + \angle ABC}{4+3} = \frac{180^\circ}{7}$. Am aplicat proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale și faptul că unghiurile alăturate într-un romb sunt suplementare.
Cum $(CP$ este bisectoarea unghiului $\angle ACD \implies \angle ACP = \frac{\angle ACD}{2} = \frac{\angle BCD}{4} = \frac{180^\circ}{7}$.
Putem calcula acum unghiurile alăturate bazei mari în trapezul $ABCP : \angle ABC = \frac{3 \cdot 180^\circ}{7}$, iar $\angle BCP = \angle BCA + \angle ACP = \frac{3 \cdot 180^\circ}{7}$, deci $\angle ABC \equiv \angle BCP \implies$ trapezul $ABCP$ este isoscel, iar într-un trapez isoscel diagonalele sunt congruente, adică $AC = BP$. Cu cele demonstrate până acum este evident că afirmația **a**) este falsă. Nici afirmația **b**) nu este corectă pentru că $\angle ABC \neq 60^\circ$. În final, diagonalele AC și BD sunt perpendiculare, deci $AC \perp BP$ este falsă pentru că dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe acea dreaptă. Dintre cele 4 afirmații, cea corectă este $\boxed{AC = BP}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

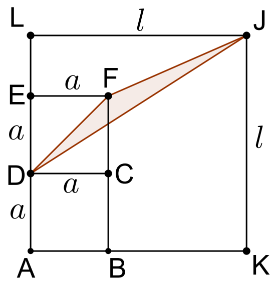
□

Problema 16

Pătratele $ABCD$ și $CDEF$ au laturile de lungime a, iar pătratul $AKJL$, $B \in (AK)$, $E \in (AL)$, are latura de lungime $l > 2a$. Aria triunghiului $\triangle DFJ$ este egală cu:

a) a^2
b) $2a^2$
c) $\frac{a^2}{2}$
d) $\frac{a^2}{3}$

Demonstrație. $\mathcal{A}_{DFJ} = \mathcal{A}_{DJL} - \mathcal{A}_{DEF} - \mathcal{A}_{FELJ} = \frac{l(l-a)}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(l-2a)(l+a)}{2} = \frac{l^2 - al}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{l^2 + al - 2al - 2a^2}{2} = \frac{l^2 - al - a^2 - l^2 - al + 2al + 2a^2}{2} = \boxed{\frac{a^2}{2}}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

$\square$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore