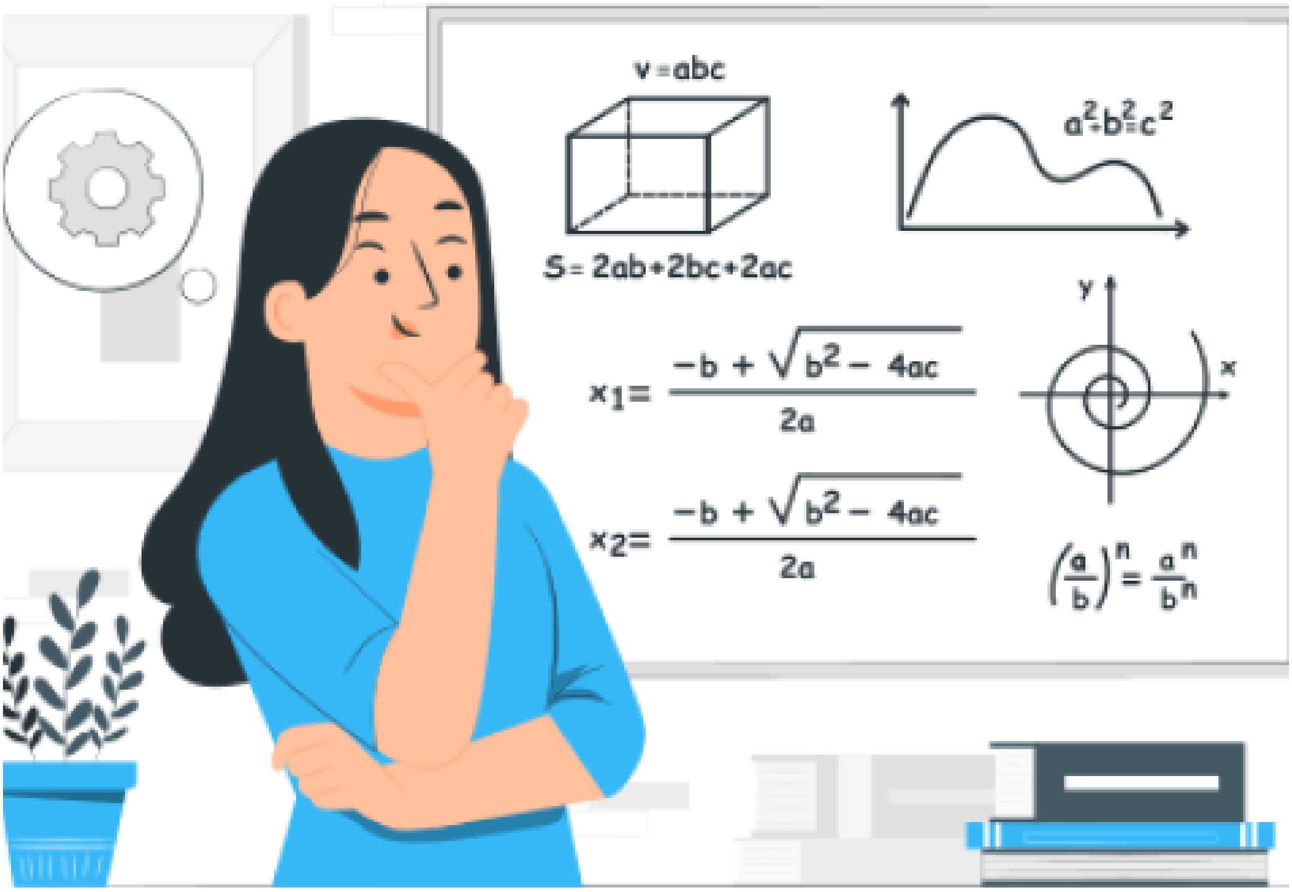



# Concursul de matematică Upper.School
# Ediția 2024-2025

## Etapa I
## Clasa a VIII-a

## - Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

# §1 Soluții

**Problema 1**

Știind că $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{2}$, $y \neq 0$, aflați valoarea raportului $\dfrac{3x+5y}{2x+y}$.

a) $\dfrac{21}{7}$ b) $\dfrac{21}{16}$ c) $\dfrac{31}{8}$ d) $\dfrac{31}{16}$

*Demonstrație.* Scoatem factor comun la numărător și numitor pe $y$ și apoi simplificăm.

$$\frac{y\left(3\cdot\dfrac{x}{y}+5\right)}{y\left(2\cdot\dfrac{x}{y}+1\right)} = \frac{3\cdot\dfrac{x}{y}+5}{2\cdot\dfrac{x}{y}+1} = \frac{3\cdot\dfrac{7}{2}+5}{2\cdot\dfrac{7}{2}+1} = \frac{\dfrac{21+10}{2}}{7+1} = \frac{31}{2}\cdot\frac{1}{8} = \boxed{\frac{31}{16}}.$$

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 2**

Prețul unui produs s-a mărit succesiv, de două ori, cu 25%, după care are loc o ieftinire. Vânzătorul constată ca prețul final este același cu cel inițial. Cu ce procent s-a redus prețul?

a) 50 b) 40 c) 36 d) 32

*Demonstrație.* Vom nota cu $x$ prețul inițial și cu $p$ procentul cu care se face reducerea de preț.

- după prima scumpire: $x + \dfrac{25}{100}\cdot x = \dfrac{125}{100}\cdot x = \dfrac{5}{4}\cdot x$;
- după a doua scumpire: $\dfrac{5}{4}\cdot x + \dfrac{25}{100}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot x = \dfrac{5}{4}\cdot x\left(1+\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{25}{16}\cdot x$.
- după ieftinire: $\dfrac{25}{16}\cdot x - \dfrac{p}{100}\cdot\dfrac{25}{16}\cdot x$.

Prețul final este același cu cel inițial, adică $x = \dfrac{25}{16}\cdot x - \dfrac{p}{100}\cdot\dfrac{25}{16}\cdot x \iff \dfrac{25}{16}\cdot\left(1-\dfrac{p}{100}\right) = 1 \iff \dfrac{25}{16}\cdot\dfrac{100-p}{100} = 1 \iff p = 36$. Procentul cu care s-a redus produsul este $\boxed{36}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 3**

Soluția inecuației

$$\{x \in \mathbb{R} | \; |2x-3| \geq 3\}$$

este $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$. Care este valoarea sumei $a+b$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

*Demonstrație.* $|2x-3| \geq 3 \implies 2x-3 \geq 3$ sau $2x-3 \leq -3 \implies 2x \geq 6$ sau $2x \leq 0 \implies$ $\implies x \geq 3$ sau $x \leq 0 \implies B = (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$. Așadar, $a = 0$ și $b = 3$, deci valoarea sumei $a+b$ este egală cu $\boxed{3}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ........................................................ $5p$

□

## Problema 4

Fie $a>0$, $b>0$, cu $a<b$. Intersecția intervalelor $[a,b]$ și $\left(0,\dfrac{a+b}{2}\right)$ este:

a) $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ b) $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right)$ c) $\left(0,\dfrac{a+b}{2}\right)$ d) $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right)$

*Demonstrație.* Dacă $a<b$, atunci $a<\dfrac{a+b}{2}<b$ pentru că această dublă inegalitate este echivalentă cu $2a<a+b<2b$, (am înmulțit cu 2 prima inegalitate) și aceste două inegalități sunt echivalente cu $a<b$. Ordinea crescătoare a celor 4 numere care sunt capetele intervalelor este $0<a<\dfrac{a+b}{2}<b \implies \left(0,\dfrac{a+b}{2}\right)\cap[a,b]=\boxed{\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right)}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{b)}}$ ........................................................ $5p$

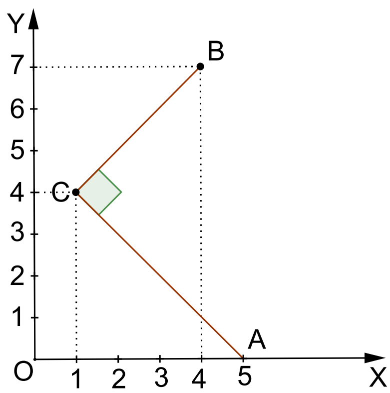
□

## Problema 5

În sistemul de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(5,0)$, $B(4,7)$ și $C(1,4)$. Măsura unghiului $ACB$ este egală cu:

a) $45°$ b) $30°$ c) $60°$ d) $90°$

*Demonstrație.* Dacă într-un sistem de coordonate se consideră punctele $A(x_a,y_a)$ și $B(x_b,y_b)$, atunci lungimea segmentului $(AB)$ este egală cu $AB=\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$.




Vom aplica această formulă pentru a calcula lungimile segmentelor determinate de cele trei puncte, aceasta fiind prima idee pe care trebuie să o aplicăm într-o astfel de situație.
Astfel, $AB=\sqrt{(5-4)^2+(0-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{(5-1)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$ și $BC=\sqrt{(4-1)^2+(7-4)^2}=3\sqrt{2}$. Observăm că $AB^2=50$, $AC^2+BC^2=32+18=50 \implies$ $\implies AB^2=AC^2+BC^2 \implies \triangle ABC$ este dreptunghic cu ipotenuza $AB \implies$ măsura unghiului $\angle ACB$ este egală cu $\boxed{90°}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 6**

Numărul $x = \dfrac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}}{5}$ este egal cu:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

*Demonstrație.*

$$x = \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{2+2}}}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+2}}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{13+3}}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{21+\sqrt{16}}}{5} = \frac{\sqrt{21+4}}{5} = \frac{\sqrt{25}}{5} = \frac{5}{5} = \boxed{1}.$$

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ........................................................................ $5p$

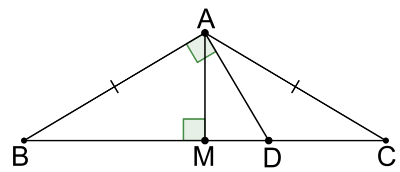
□

**Problema 7**

În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu baza $BC$, unghiul $\angle BAC$ este obtuz. Se cunosc $BC = 32$ cm și $d(A, BC) = 12$ cm. Perpendiculara în $A$ pe latura $AB$ intersectează latura $BC$ în $D$. Care este valoarea raportului $\dfrac{AB}{DC}$?

a) $\dfrac{25}{7}$ b) $\dfrac{21}{7}$ c) $\dfrac{25}{14}$ d) $\dfrac{20}{7}$

*Demonstrație.* Notăm cu $M$ piciorul perpendicularei din $A$ pe $BC$.



Cum triunghiul este isoscel rezultă că $M$ este mijlocul lui $(BC)$, deci $BM = MC = 16$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AMB$ și rezultă $AB^2 = AM^2 + MB^2 \iff AB^2 = 12^2 + 16^2 \iff AB^2 = 144 + 256 \iff AB^2 = 400 \iff AB = 20$ cm. Aplicăm teorema înălțimii în $\triangle BAD$ de unde avem $AM^2 = BM \cdot MD \iff 12^2 = 16 \cdot MD \iff 144 = 16 \cdot MD \iff MD = 9$. Obținem în continuare că $BD = BM + MD = 25$ și $DC = 7$. De aici, $\frac{AB}{DC} = \boxed{\frac{20}{7}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ........................................................ $5p$

□

## Problema 8

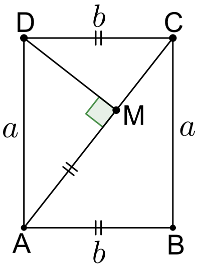
Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AD = a$ și $CD = b$. Fie $DM \perp AC$, $M \in AC$ și $AM = AB$. Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este egală cu:

a) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  b) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$  c) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$  d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

*Demonstrație.* Aplicăm teorema catetei în $\triangle ADC \implies AD^2 = AM \cdot AC \iff a^2 = b\sqrt{a^2+b^2} \iff a^4 = b^2 \cdot (a^2+b^2) \iff a^4 - a^2b^2 = b^4 \iff 4a^4 - 4a^2b^2 = 4b^4 \iff 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = 5b^4 \iff (2a^2-b^2)^2 = 5b^4 \iff |2a^2 - b^2| = b^2\sqrt{5}$. Analizăm următoarele 2 cazuri:

- $2a^2 - b^2 = -b^2\sqrt{5} \iff 2a^2 = b^2 - b^2\sqrt{5} < 0$, deci acest caz nu convine;
- $2a^2 - b^2 = b^2\sqrt{5} \iff 2a^2 = b^2 + b^2\sqrt{5} \iff \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este egală cu $\boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}$.




**Răspuns corect:** $\boxed{\text{b)}}$ ........................................................ $5p$

□

## Problema 9

Știind că $\sqrt{8x^2y + 8xy^2} \geq 2xy + x + y$ cu $x, y \in \mathbb{N}^*$, aflați valoarea sumei $x + y$.

a) 8  b) 4  c) 3  d) 2

*Demonstrație.* Vom nota

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Atunci, $\sqrt{8x^2y+8xy^2} \geq 2xy+x+y$ devine:

$$\sqrt{4 \cdot \underbrace{2xy}_{b}\underbrace{(x+y)}_{a}} \geq \underbrace{2xy}_{b}+\underbrace{(x+y)}_{a} \iff 2\sqrt{ab} \geq a+b$$

Dar cum $2\sqrt{ab} \leq a+b$, din $\begin{cases} 2\sqrt{ab} \geq a+b \\ 2\sqrt{ab} \leq a+b \end{cases} \implies 2\sqrt{ab}=a+b \implies a=b \implies x+y=2xy$

$\left.\begin{array}{l} y(2x-1)=x \\ 2x-1 \neq 0 \end{array}\right\} \implies y=\dfrac{x}{2x-1} \in \mathbb{N}^* \implies \begin{cases} 2x-1 | x \\ 2x-1 | 2x-1 \end{cases} \implies 2x-1 \mid 1 \implies$

$\implies 2x-1 \in \{-1,1\} \implies \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Dar $x,\ y \in \mathbb{N}^*$, deci $x=1$ și $y=1 \implies \boxed{x+y=2}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ............................................................ $5p$

□

## Problema 10

Dreptunghiul $ABCD$ are dimensiunile $AB=18$ cm și $BC=12$ cm. Determinați sinusul unghiului $\angle APD$, unde $M$ este mijlocul segmentului $(AB)$ și $AC \cap DM = \{P\}$.

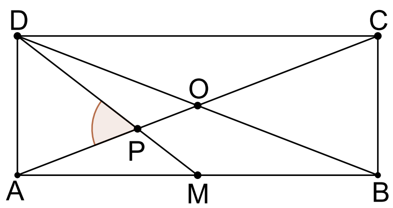
a) $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$ b) $\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$ c) $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$ d) $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

*Demonstrație.* Vom calcula aria triunghiului $\triangle APD$ în două moduri, unul dintre acestea fiind

$$\mathcal{A}_{APD} = \frac{AP \cdot PD \cdot sin(\angle APD)}{2}$$

de unde se obține valoarea cerută. În celălalt mod, aria triunghiului $\triangle APD$ o vom determina din proporția

$$\frac{\mathcal{A}_{APD}}{\mathcal{A}_{AMD}} = \frac{\dfrac{PD \cdot d(A,MD)}{2}}{\dfrac{MD \cdot d(A,MD)}{2}} = \frac{PD}{MD}.$$




Să observăm că $P$ este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ADB$. Într-adevăr, dacă notăm cu $O$ punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului, atunci $DM$ și $AO$ sunt mediane în $\triangle ABD$, deci $P$ este centru de greutate în acest triunghi și $\dfrac{PD}{MD}=\dfrac{2}{3}$, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{APD}}{\mathcal{A}_{AMD}}=\dfrac{2}{3}$. Aria triunghiului $\triangle ADM$ este jumătate din aria triunghiului $\triangle ABD$ pentru că mediana împarte un triunghi în două triunghiuri de arie egală, iar aria triunghiului $\triangle ABD$ este jumătate din aria dreptunghiului $ABCD$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}_{ABCD}=AB \cdot BC = 12 \cdot 18 \implies \mathcal{A}_{AMD} = \dfrac{12 \cdot 18}{4} = 54$ cm$^2$. Deci, $\dfrac{\mathcal{A}_{APD}}{\mathcal{A}_{AMD}} = \dfrac{2}{3} \iff \dfrac{\mathcal{A}_{APD}}{54}=\dfrac{2}{3} \iff \mathcal{A}_{APD}=\dfrac{2 \cdot 54}{3} = 36$ cm$^2$.
Vom determina lungimea diagonalei $AC$ aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ABC \implies$
$\implies AC^2=AB^2+BC^2=12^2+18^2=6^2 \cdot (2^2+3^2) \iff AC=6\sqrt{13}$. Cum $O$ este mijlocul

diagonalei $(AC) \implies AO = \dfrac{AC}{2} = 3\sqrt{13}$ și $AP = \dfrac{2}{3} \cdot AO = \dfrac{2}{3} \cdot 3\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.
Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ADM$ și rezultă $DM^2 = DA^2 + AM^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \iff DM = 15$. De aici obținem $DP = \dfrac{2}{3} \cdot DM = \dfrac{2}{3} \cdot 15 = 10$.
$\mathcal{A}_{APD} = \dfrac{AP \cdot PD \cdot sin(\angle APD)}{2} \iff 36 = \dfrac{2\sqrt{13} \cdot 10 \cdot sin(\angle APD)}{2} \iff sin(\angle APD) = \dfrac{2 \cdot 36}{2\sqrt{13} \cdot 10} = \boxed{\dfrac{18\sqrt{13}}{65}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5$p$

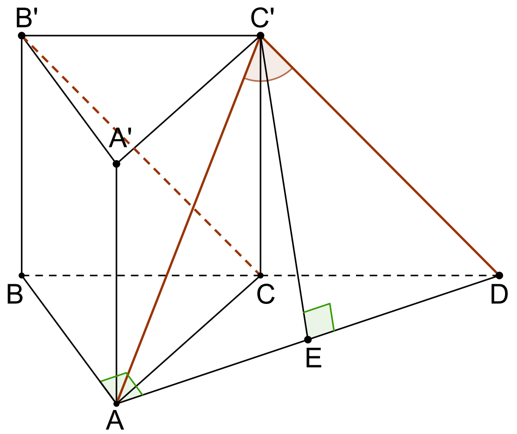
□

**Problema 11**

Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = 2$ cm și $AA' = \sqrt{3}$ cm. Care este sinusul unghiului format de dreptele $B'C$ și $AC'$?

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$   b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{14}$   c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$   d) $\dfrac{24}{25}$

*Demonstrație.* Completăm $C'B'C$ cu al patrulea vârf al paralelogramului $C'B'CD$, prelungind $(BC$ cu segmentul $CD = BC$.




Astfel, $CD = B'C'$, $CD \parallel B'C' \implies CDC'B'$ este paralelogram, deci $B'C \parallel C'D \implies \angle(B'C, AC') = \angle(C'D, AC')$. Pentru a determina sinusul acestui unghi vom lucra în $\triangle AC'D$, iar pentru asta vom avea nevoie de laturile acestui triunghi.

- Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ACC' \implies AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \iff AC'^2 = 4 + 3 \iff AC' = \sqrt{7}$ și $C'D = \sqrt{7}$.
- $\triangle ABD$ este dreptunghic în $A$ pentru că $AC$ este mediană în acest triunghi și $AC = \dfrac{BD}{2}$ (am aplicat reciproca teoremei medianei). În plus, acest triunghi are unghiurile ascuțite de măsuri $60°$, respectiv $30°$, deci laturile au lungimile $x$, $2x$ și $x\sqrt{3} \implies AD = 2\sqrt{3}$ cm.
- Vom afla lungimea înălțimii din $C'$ în $\triangle AC'D$. Fie $C'E \perp AD$. Cum $AC' = DC' \implies AE = ED = \sqrt{3}$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle C'ED$ și obținem $C'E^2 = C'D^2 - DE^2 = 7 - 3 = 4 \iff C'E = 2$ cm.

- Calculăm aria triunghiului $\triangle AC'D$ în două moduri:
$\mathcal{A}_{AC'D} = \dfrac{C'E \cdot AD}{2} = \dfrac{AC' \cdot DC' \cdot sin(\angle AC'D)}{2} \iff \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot sin(\angle AC'D)}{2} \iff$
$\iff sin(\angle AC'D) = \boxed{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 12**

Suma numerelor reale $a$ și $b$ care verifică relația $5a + 2b + 24 = 6\sqrt{5a+8} + 4\sqrt{2b+3}$ este egală cu:

a) $\dfrac{3}{5}$  b) $\dfrac{7}{10}$  c) 10  d) 11

*Demonstrație.*
$5a + 2b + 24 = 6\sqrt{5a+8} + 4\sqrt{2b+3} \iff 5a + 2b + 24 - 6\sqrt{5a+8} - 4\sqrt{2b+3} = 0 \iff$
$\iff \Big((5a+8) - 6\sqrt{5a+8} + 9\Big) + \Big((2b+3) - 4\sqrt{2b+3} + 4\Big) = 0 \iff$
$$\iff \left(\sqrt{5a+8} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{2b+3} - 2\right)^2 = 0 \implies \begin{cases} \sqrt{5a+8} = 3 \implies 5a + 8 = 9 \implies a = \dfrac{1}{5} \\ \sqrt{2b+3} = 2 \implies 2b + 3 = 4 \implies b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
Am folosit rezultatul care ne spune că, dacă suma a două sau mai multe pătrate de numere reale este egală cu 0, atunci fiecare dintre acestea este egal cu 0. Suma numerelor $a$ și $b$ este egală cu $\boxed{\dfrac{7}{10}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{b)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 13**

Dacă $x > 0$, $y > 0$ și $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)(y+4)}$, atunci media geometrică a numerelor $x$ și $y$ este egală cu:

a) 6  b) 4  c) 2  d) 1

*Demonstrație.* Prin ridicare la pătrat $4x+y+4\sqrt{xy} = xy+y+4x+4 \implies xy-4\sqrt{xy}+4 = 0 \implies \left(\sqrt{xy} - 2\right)^2 = 0 \implies \sqrt{xy} = 2 \implies M_g = \sqrt{xy} = \boxed{2}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 14**

Aflați câte perechi de numere naturale $(x, y)$ verifică relația $\dfrac{x}{y+1} + \dfrac{y}{x+1} = 1$.

a) 3  b) 2  c) 1  d) 4

*Demonstrație.* Amplificăm prima fracție cu $x+1$ și pe a doua cu $y+1$ și obținem $\frac{x}{y+1}+$
$+\frac{y}{x+1}=1 \iff \frac{x(x+1)}{(x+1)(y+1)}+\frac{y(y+1)}{(x+1)(y+1)}=1 \iff \frac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1}=1 \iff$
$x^2+x+y^2+y=xy+x+y+1 \iff x^2+y^2=xy+1$.

Din $\begin{cases} x^2+y^2=xy+1 \\ x^2+y^2\geq 2xy \end{cases} \implies xy+1\geq 2xy \iff 1\geq xy \implies xy=0$ sau $xy=1$.

- Cazul $xy=0 \implies \begin{cases} x=0,\ y=1 \\ x=1,\ y=0 \end{cases}$
- Cazul $xy=1 \implies x=1, y=1$, care verifică ecuația dată.

Soluțiile ecuației sunt $(x,y)\in\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$, deci numărul de perechi care verifică relația din ipoteză este $\boxed{3}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ........................................................ $5p$

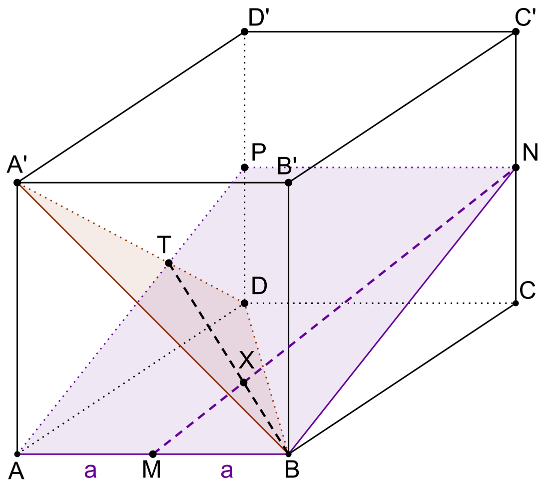
□

**Problema 15**

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele muchiilor $AB$, respectiv $CC'$. Dreapta $MN$ intersectează planul $(A'BD)$ în punctul $X$. Care este valoarea raportului $\frac{MX}{XN}$?

a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $3$ c) $\frac{1}{3}$ d) $1$

*Demonstrație.* Partea cea mai dificilă este aflarea punctului $X$, nu ca punct de intersecție dintre o dreaptă și un plan, ci ca intersecția a două drepte. Cu alte cuvinte, trebuie să găsim o dreaptă din planul $(A'BD)$ care se intersectează cu $MN$. Pentru aceasta vom căuta un plan care conține dreapta $MN$ și care se intersectează cu planul $(A'BD)$. Vom considera mijlocul lui $DD'$ pe care îl vom nota cu $P$. Este foarte ușor de observat că $PN \parallel AB$, deci punctele $A$, $B$, $N$ și $P$ sunt coplanare.




$$\begin{cases} M\in AB\subset(ABN) \\ N\in(ABN) \end{cases} \implies MN\subset(ABN).$$

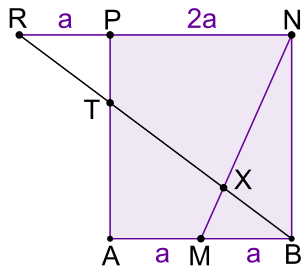
Vom nota cu $T$ punctul de intersecție al dreptelor $A'D$ și $AP$.

$$\begin{cases} T \in AP \subset (ABN) \\ B \in (ABN) \end{cases} \implies BT \subset (ABN) \ (1).$$

$$\begin{cases} T \in A'D \subset (A'BD) \\ B \in (A'BD) \end{cases} \implies BT \subset (A'BD) \ (2).$$

Din (1) și (2) $\implies (ABN) \cap (A'BD) = BT$. Dreptele $MN$ și $BT$ sunt coplanare și neparalele, deci sunt concurente. Dar punctul lor de concurență este și în planul $(A'BD)$ pentru că $BT \subset (A'BD)$ și, cum o dreaptă și un plan au cel mult un punct în comun, rezultă că acesta este punctul $X$. Vom nota $AB = 2a$.

- Vom afla valoarea raportului $\dfrac{PT}{TA}$. Deoarece $PD \parallel AA'$, din TFA obținem $\triangle PTD \sim \triangle ATA' \implies \dfrac{PT}{TA} = \dfrac{PD}{AA'} = \dfrac{1}{2}$.
- Prelungim dreapta $BT$ și notăm cu $R$ punctul de intersecție al dreptei $BT$ cu dreapta $PN$. Deoarece $RP \parallel AB$, din TFA obținem $\triangle PTR \sim \triangle ATB \implies \dfrac{PT}{TA} = \dfrac{RP}{BA} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{RP}{2a} = \dfrac{1}{2} \iff RP = a \implies RN = RP + PN = 3a$.




- Deoarece $RN \parallel MB$, din TFA obținem $\triangle RXN \sim \triangle BXM \implies \dfrac{MX}{XN} = \dfrac{BM}{RN} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ............................................................ $5p$

□

## Problema 16

Andrei dispune de mai multe cuburi mici identice, din care construiește prin lipire un cub mai mare, folosindu-le pe toate. Apoi, colorează în albastru câteva dintre fețele cubului mare. După ce termină de colorat, Andrei descompune cubul mare în cuburile mici inițiale și observă că exact 3 dintre acestea nu au nicio față colorată în albastru. Câte fețe ale cubului mare au fost colorate în albastru de către Andrei?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

*Demonstrație.* Vom spune că un cub construit prin lipirea mai multor cuburi mici identice este de latură $n$ dacă pe fiecare muchie sunt dispuse $n$ cuburi mici.
Cuburile din interior, care nu au nicio față vizibilă, nu pot avea nicio față colorată în albastru.

- Cubul de latură 4 are $(4-2)^3 = 8$ cuburi în interior, deci numărul cuburilor mici care nu au nicio față vopsită este cel puțin 8. Pe măsură ce latura cubului devine mai mare, numărul cuburilor din interior este mai mare. Prin urmare, latura cubului mare este cel mult egală cu 3.

- În situația în care latura cubului mare este 2, nu există niciun cub interior. Dacă o singură față este vopsită în albastru, atunci sunt 4 cuburi care nu au nicio față vopsită. Dacă se mai vopsește o față, atunci avem două situații:
  – noua față vopsită este opusă cu cea vopsită inițial, caz în care toate cele 8 cuburi mici au exact o față vopsită în albastru, situație care nu corespunde datelor problemei;
  – noua față vopsită este vecină cu cea vopsită inițial, caz în care numărul cuburilor mici care au cel puțin o față vopsită în albastru este 6 și două nu au nicio față vopsită în albastru, situație care iarăși nu convine.

În concluzie, cubul mare poate fi doar de latură 3. Acesta are un singur cub în interior, prin urmare trebuie să aflăm în care configurație mai rămân două cuburi mici nevopsite. Să observăm că pentru fiecare față nevopsită în albastru, cubul mic din centrul acestei fețe nu are nicio față albastră. Adică, fiecare față nevopsită crește numărul cuburilor mici nevopsite cu cel puțin unu, de unde rezultă că numărul maxim de fețe nevopsite este 2.

- Nu este posibil să rămână o singură față nevopsită pentru că din această față doar cubul mic central va fi nevopsit, cele de pe margine au o față sau două vopsite în albastru pentru că fac parte și din fețele vecine care sunt albastre;

Prin urmare, numărul de fețe care nu au fost colorate în albastru este 2. Este necesar să oferim și un exemplu pentru a finaliza demonstrația, iar cazul în care rămân nevopsite două fețe opuse este cel care convine. Numărul de fețe ale cubului mare care au fost colorate în albastru este $\boxed{4}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........ $5p$

□

**Problemele 1-16:** ........ $16 \times 5p = 80p$
**Puncte acordate din oficiu:** ........ $20p$
**Total:** ........ $100p$

**Timp de lucru:** ........ 2 ore