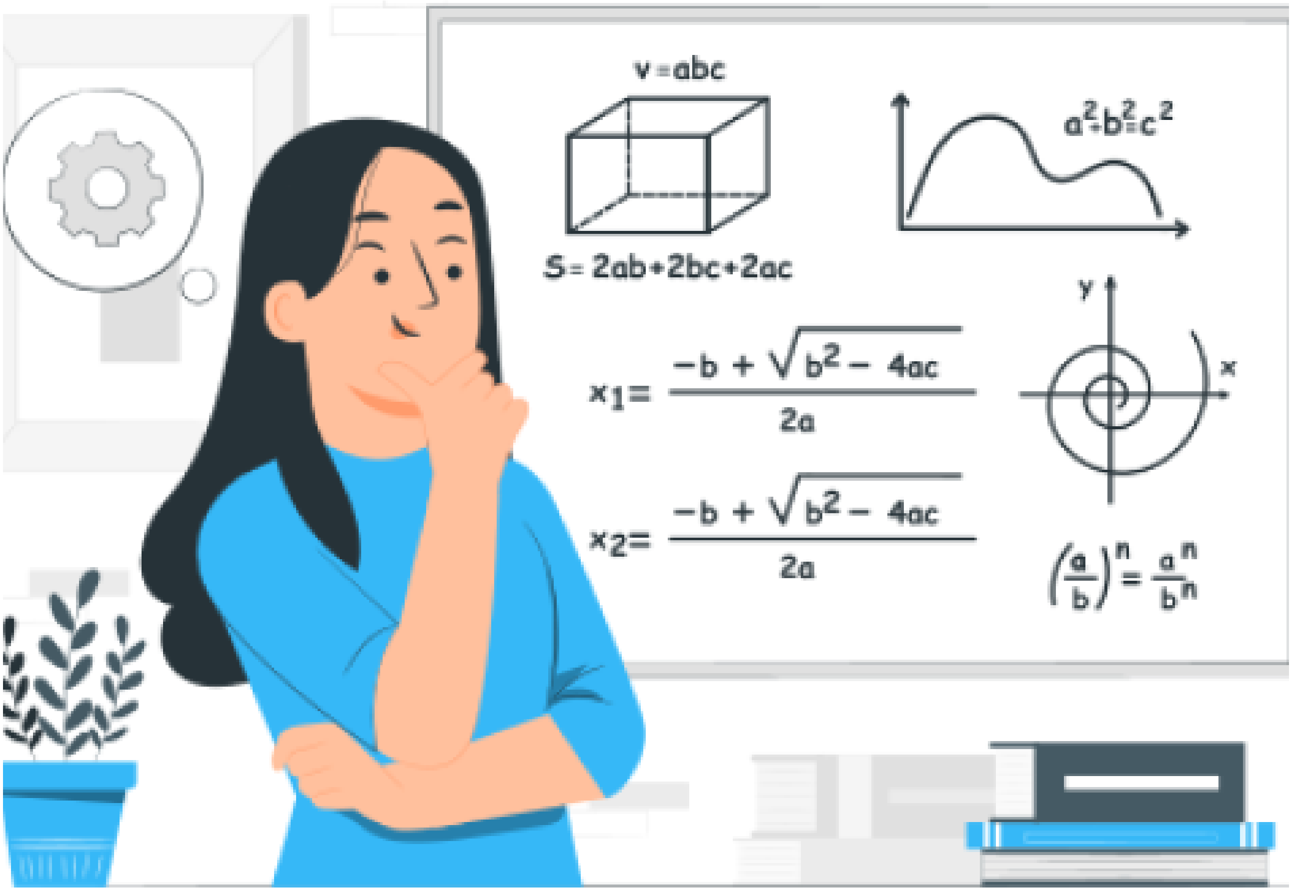

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa II
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Marius Mîinea

§1 Soluții

Problema 1

Care este cel mai mic număr natural care are produsul cifrelor egal cu $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$?

Demonstrație. Observăm că

$$8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Dorim să grupăm factorii primi în cifre (numere de la 2 la 9) astfel încât produsul lor să fie $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Este important ca numărul final să aibă cât mai puține cifre, iar pentru asta alegem, în măsura posibilității, cifre cât mai mari (deoarece astfel folosim mai mulți factori).

- Deoarece $9 = 3^2$, putem acoperi factorii 3^2 cu cifra 9.
- Deoarece $8 = 2^3$ și avem 2^7 în descompunere, folosim două cifre 8 pentru a acoperi 2^6. Rămâne un factor suplimentar 2 nefolosit.
- Cifrele 7 și 5 vor reprezenta factorii 7 și, respectiv, 5, deoarece acești factori nu se pot grupa.
- Factorul 2 rămas este reprezentat prin cifra 2.

Astfel, avem următoarele cifre:

$$9,\ 8,\ 8,\ 7,\ 5,\ 2.$$

Pentru a obține cel mai mic număr, aranjăm cifrele în ordine crescătoare și obținem numărul $\boxed{257889}$.

Răspuns corect: $\boxed{257889}$ 5p

□

Problema 2

Pentru câte valori ale numărului natural nenul n numerele $5^n - 2$ și $5^n + 2$ sunt simultan numere prime?

Demonstrație. Analizăm următoarele 2 cazuri:

- Dacă n este par, atunci $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, deci $5^n + 2 = 25^k + 2 = (24+1)^k + 2 = = M_{24} + 3 = M_3$. Cum $5^n + 2$ este prim, obținem $5^n + 2 = 3$ pentru că acesta este singurul număr prim divizibil cu 3, de unde $n = 0$, care nu convine;
- Dacă n este impar, atunci $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, deci $5^n - 2 = 5 \cdot 25^k - 2 = 5 \cdot (24+1)^k - 2 = = 5 \cdot (M_{24} + 1) - 2 = M_3$. Cum $5^n - 2$ este prim, obținem $5^n - 2 = 3$, deci $n = 1$, care verifică cerința.

Numărul de valori ale numărului natural nenul n pentru care numerele $5^n - 2$ și $5^n + 2$ sunt simultan numere prime este egal cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5p

□

Problema 3

Aflați numărul natural $\overline{abcd}$ care verifică relația

$$\overline{abcd} + 7 \cdot \overline{abc} = 2025.$$

Demonstrație. $\overline{abcd} + 7 \cdot \overline{abc} = 2025 \iff \overline{abc0} + d + 7 \cdot \overline{abc} = 2025 \iff 10 \cdot \overline{abc} + d + 7 \cdot \overline{abc} = 2025 \iff 17 \cdot \overline{abc} + d = 2025$.

Cum d este cifră, înseamnă că $d < 17$, deci cifra d este restul împărțirii lui 2025 la 17, iar $\overline{abc}$ este câtul acestei împărțiri. Cum $2025 = 17 \cdot 119 + 2$, obținem $d = 2$ și $\overline{abc} = 119$, deci numărul $\overline{abcd}$ este egal cu $\boxed{1192}$.

Răspuns corect: $\boxed{1192}$ .... $5p$

□

Problema 4

Care este numărul maxim de numere prime care pot fi conținute într-un set de 13 numere naturale consecutive?

Demonstrație. Vom nota cu $a + 1$, $a + 2$, $a + 3, \ldots$, $a + 13$ cele 13 numere naturale consecutive. Pentru $a = 0$, în grupul $1, 2, 3, \ldots, 13$ se află 6 numere prime, iar dacă $a = 1$ avem grupul $2, 3, 4, \ldots, 14$, care conține tot 6 numere prime. În rest, pentru $a \geqslant 2$, cel puțin 6 numere din orice grup sunt numere pare (diferite de 2), iar dintre numerele impare cel puțin unul este multiplu de 3. Așadar, cel puțin 7 numere nu sunt prime. În concluzie, numărul maxim căutat este $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 5

Se consideră numerele naturale x, y și z care verifică relația $2025 \cdot x + y - 2024 \cdot z = 7$. Care este restul împărțirii numărului $x + y$ la 2024?

Demonstrație.

$$2025 \cdot x + y - 2024 \cdot z = 7 \mid + 2024 \cdot z$$

$$2025 \cdot x + y = 7 + 2024 \cdot z$$

$$2024 \cdot x + x + y = 7 + 2024 \cdot z \mid - 2024 \cdot x$$

$$x + y = 2024 \cdot (z - x) + 7$$

Restul împărțirii numărului $x + y$ la 2024 este $\boxed{7}$

Răspuns corect: $\boxed{7}$ .... $5p$

□

Problema 6

O cantitate de apă trebuie ambalată în bidoane și transportată la o grădină zoologică. Avem la dispoziție bidoane de câte 15 litri și bidoane de câte 40 litri, dar numărul celor de 40 de litri este cel mult 5. Dacă s-ar umple doar bidoanele de 15 litri, atunci ar rămâne 80 de litri. Dacă s-ar umple doar bidoanele de 40 litri, atunci ar rămâne 10 de litri. Care este cantitatea de apă care trebuie transportată la gradina zoologică?

Demonstrație. Vom nota cu x numărul bidoanelor de câte 15 litri și cu y numărul bidoanelor de câte 40 litri. Cantitatea de apă care trebuie transportată poate fi calculată în două moduri:

- *Dacă s-ar umple doar bidoanele de* 15 *litri, atunci ar rămâne* 80 *de litri,* adică $15 \cdot x + 80$;
- *Dacă s-ar umple doar bidoanele de* 40 *litri, atunci ar rămâne* 10 *de litri,* adică $40 \cdot y + 10$.

Egalăm cele două relații și obținem $15 \cdot x + 80 = 40 \cdot y + 10 \iff 15 \cdot x + 70 = 40 \cdot y \mid : 5 \iff 3 \cdot x + 14 = 8 \cdot y$. De aici observăm că $8 \cdot y > 14 \iff y \geq 2$ și analizăm pe rând cazurile $y = 2$, 3, 4, 5.

- $y = 2$, ecuația devine $3 \cdot x + 14 = 16$, fără soluție;
- $y = 3$, ecuația devine $3 \cdot x + 14 = 24$, fără soluție;
- $y = 4$, ecuația devine $3 \cdot x + 14 = 32 \iff 3 \cdot x = 18 \iff x = 6$;
- $y = 5$, ecuația devine $3 \cdot x + 14 = 40$, fără soluție.

Cantitatea de apă care trebuie transportată este $40 \cdot 4 + 10 = \boxed{170}$.
Răspuns corect: $\boxed{170}$ .... $5p$

□

Problema 7

Numerele naturale a, b și c verifică relațiile

$$a + b = 11$$

$$b \cdot c = 40.$$

Aflați valoarea minimă a produsului $a \cdot c$.

Demonstrație. Din $b \cdot c = 40$ rezultă că b este un divizor al numărului 40. Din $a + b = 11$ rezultă că $b \leq 11$. Cel mai mare divizor al lui 40 care este mai mic sau egal decât 11 este 10, iar pentru această valoare obținem $a = 11 - 10 = 1$ și $c = 40 : 10 = 4$. Dacă micșorăm valoarea lui b, atunci valorile pe care le iau numerele a și c cresc simultan, deci și suma lor va fi mai mare. Valoarea minimă a produsului $a \cdot c$ este egală cu $1 \cdot 4 = \boxed{4}$.
Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 8

Ana are 600 de bile, unele albe, altele roșii. Dorind să aibă numai bile albe, ea face schimb cu prietena ei Roxana, care oferă câte 8 bile albe pentru fiecare 17 bile roșii. După schimb Ana rămâne cu 420 de bile albe și nicio bilă roșie. Câte bile albe a avut Ana la început?

Demonstrație. La un schimb Ana dă 17 bile și primește 8, deci numărul bilelor Anei se micșorează cu 9 la fiecare schimb. Așadar, după n schimburi numărul bilelor Anei se micșorează cu $9 \cdot n$. Avem $600 - 9 \cdot n = 420$, de unde $9 \cdot n = 180$, adică $n = 20$. La fiecare schimb Ana a primit 8 bile albe. În cele 20 de schimburi a primit $20 \cdot 8 = 160$ de bile albe. Cum la sfârșit are 420 de bile albe, rezultă că inițial numărul de bile albe pe care le avea Ana era $420 - 160 = \boxed{260}$.
Răspuns corect: $\boxed{260}$ .... $5p$

□

Problema 9

Patru bufnițe, numerotate de la 1 la 4, au înălțimi diferite.

- Bufnița 1 spune *„Nu sunt nici cea mai mare, nici cea mai mică”*
- Bufnița 2 spune *„Nu sunt cea mai mică”*
- Bufnița 3 spune *„Sunt cea mai mare”*
- Bufnița 4 spune *„Sunt cea mai mică”*

Una a mințit, iar celelalte trei au spus adevărul. Ce număr are bufnița care este cea mai mare?

Demonstrație. Vom căuta să aflăm care este bufnița care minte și apoi vom afla care este cea mai mare dintre toate.

- Dacă Bufnița 1 este cea care minte, atunci ea este cea mai mare sau cea mai mică, caz în care și una dintre bufnițele 3 sau 4 minte, lucru care nu este posibil;
- Dacă Bufnița 2 este cea care minte, atunci ea este cea mai mică, caz în care și bufnița 4 minte, lucru care nu este posibil;
- Dacă bufnița 3 este cea care minte, atunci bufnița 4 spune adevărul, deci ea este cea mai mică, bufnița 3 nu este nici cea mai mică, nici cea mai mare, înseamnă că aceasta, împreună cu bufnița 1 ocupă pozițiile 2 și 3, iar bufnița 2 este cea mai mare;
- Dacă bufnița 4 este cea care minte, atunci bufnița 3 spune adevărul, deci ea este cea mai mare, iar cea mai mică dintre bufnițe ar putea fi 1 sau 2, lucru care nu este posibil pentru că acestea ar trebui să spună adevărul.

În concluzie, bufnița 3 minte, iar cea mai mare dintre acestea este cea cu numărul $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

$\square$

Problema 10

Paginile unei cărți sunt numerotate astfel: pe prima foaie sunt paginile 1 și 2, pe a doua foaie paginile 3 și 4, ..., iar pe ultima foaie sunt paginile 99 și 100. Spunem că o foaie este *memorabilă* dacă cele două pagini sunt numerotate cu numere care au fie aceeași cifră a zecilor, fie aceeași cifră a unităților. Determinați câte foi din această carte nu sunt *memorabile*.

Notă: foaia cu paginile 77 și 78 este *memorabilă* pentru că numerele au aceeași cifră a zecilor, iar foaia cu paginile 1 și 2 nu este *memorabilă* pentru că numerele nu au o cifră a zecilor, iar cifra unităților este diferită.

Demonstrație. Primele 5 foi nu sunt *memorabile*: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(7, 8)$, $(9, 10)$. Paginile care sunt numerotate cu numere de două cifre sunt *memorabile* atâta timp cât au aceeași cifră a zecilor. Acolo unde se modifică cifra zecilor, numerele de pe cele două pagini față-verso nu au aceeași cifră nici la unități, nici la zeci. Vorbim despre perechile $(19, 20)$, $(29, 30)$, $(39, 40), \ldots,$ $(89, 90)$ și, în plus, perechea $(99, 100)$. Sunt 9 astfel de perechi, iar numărul total de pagini care nu sunt *memorabile* este $5 + 9 = \boxed{14}$.

Răspuns corect: $\boxed{14}$ 5p

□

Problema 11

Pe o tablă sunt scrise numerele

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ 10.$$

În câte moduri putem șterge două numere de pe tablă, astfel încât suma numerelor rămase să fie cel mult egală cu 45?

Demonstrație. Suma numerelor scrise inițial pe tablă este $1+2+3+\ldots+10 = (1+10)\cdot 10 : 2 = 55$. Ca suma numerelor rămase pe tablă să fie cel mult egală cu 45, de pe tablă trebuiesc șterse două numere cu suma cel puțin egală cu 10. Asta se întâmplă pentru perechile:

$$(1,9),\ (1,10),$$

$$(2,8),\ (2,9),\ (2,10),$$

$$(3,7),\ (3,8),\ (3,9),\ (3,10),$$

$$(4,6),\ (4,7),\ (4,8),\ (4,9),\ (4,10),$$

$$(5,6),\ (5,7),\ (5,8),\ (5,9),\ (5,10),$$

$$(6,7)\ (6,8),\ (6,9),\ (6,10),$$

$$(7,8),\ (7,9),\ (7,10),$$

$$(8,9),\ (8,10),$$

$$(9,10).$$

Atunci când ștergem două numere de pe tablă, nu este importantă ordinea în care le ștergem, deci nu numărăm de două ori perechile care sunt formate din aceleași numere. Ca să evităm erorile recomandăm ca perechile să fie formate din numere ordonate crescător. Numărul de moduri în care putem șterge două numere de pe tablă, astfel încât suma numerelor rămase să fie cel mult egală cu 45 este $2+3+4+5+5+4+3+2+1 = \boxed{29}$.

Răspuns corect: $\boxed{29}$ 5p

□

Problema 12

În jurul unei mese rotunde sunt așezate 7 scaune numerotate de la 1 la 7. Pe fiecare scaun se află câte un copil, iar pe masă sunt 100 de jetoane. Începând cu copilul care se află pe scaunul cu numărul 1, fiecare copil ia, pe rând, un număr de jetoane egal cu numărul locului pe care se află: copilul de pe scaunul cu numărul 1 ia un jeton, cel de pe scaunul cu numărul 2 ia două jetoane și continuă în același mod, copilul de pe scaunul cu numărul 7 ia 7 jetoane, apoi, din nou, copilul de pe scaunul cu numărul 1 ia un jeton, și așa mai departe. Jocul se oprește imediat ce un copil, la rândul său, nu mai poate ridica numărul de jetoane egal cu numărul scaunului pe care se află. Ce număr are scaunul copilului care ridică ultima dată jetoane de pe masă?

Demonstrație. La o tură completă de masă, numărul de jetoane care se ia de pe masă este $1+2+3+\ldots+7=(1+7)\cdot 7:2=28$. Vom afla câte ture complete de masă se fac împărțind numărul total de jetoane la numărul celor care se ridică de pe masă la o tură completă și obținem $100:28=3$ rest 16. Jocul continuă și copiii care mai ridică jetoane de pe masă sunt cei de pe scaunele cu numerele 1, 2, 3, 4 și 5 pentru că ei ridică de pe masă în total 15 jetoane și copilul de pe scaunul cu numărul 6 nu mai poate ridica pentru că pe masă a mai rămas $6-5=1$ jeton. Copilul care ridică ultima dată jetoane de pe masă stă pe scaunul cu numărul $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ . . . . $5p$

□

Problema 13

Într-o urnă sunt bile albe și bile roșii. Oricum am scoate 6 bile, printre ele găsim și bile albe și bile roșii. Care este cel mai mare număr de bile care ar putea fi în urnă?

Demonstrație. Numărul de bile albe este cel mult 5 pentru că, altfel, ar exista posibilitatea să extragem 6 bile albe, ceea ce contrazice datele problemei. În mod similar se demonstrează și că numărul bilelor roșii este cel mult 5. Obținem, astfel, că numărul maxim de bile care sunt în urnă este egal cu $\boxed{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{10}$ . . . . $5p$

□

Problema 14

Determinați cel mai mare număr natural de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că

$$\overline{xy}+\overline{yz}=115+\overline{zx}.$$

Demonstrație. Scriind numerele în baza 10 obținem $\overline{xy}+\overline{yz}=115+\overline{zx} \iff 10\cdot x+y+10\cdot y+z=115+10\cdot z+x \iff 10\cdot x+11\cdot y+z=115+10\cdot z+x \,|-x-z \iff 9\cdot x+11\cdot y=115+9\cdot z \iff 9\cdot x+11\cdot y-9\cdot z=115$. În ideea de a găsi numărul maxim, luăm $x=9$ și obținem $11\cdot y-9\cdot z=115-81 \implies 11\cdot y-9\cdot z=34$. Pentru $y=9$ nu obținem soluții, iar pentru $y=8 \implies 9\cdot z=88-34 \implies 9\cdot z=54 \implies z=6$. Numărul căutat este $\boxed{986}$.

Răspuns corect: $\boxed{986}$ . . . . $5p$

□

Problema 15

Scriem 0 sau 1 în fiecare pătrățel a unui tabel cu 5 linii și 5 coloane, astfel încât fiecare pătrat 2×2 extras din tabel să conțină exact 3 numere egale. Care este cea mai mare valoare posibilă a sumei tuturor numerelor din tabel?

Demonstrație. Pentru a obține suma cât mai mare posibil, trebuie să completăm tabelul cu cât mai multe cifre de 1, adică este de dorit ca fiecare pătrat 2×2 să conțină trei de 1 și câte un 0. Fiecare dintre cele 4 pătrate 2×2 din colțuri trebuie să conțină câte un 0, deci numărul de cifre de 0 este cel puțin 4. Pentru a demonstra că acesta este cel mai mic număr de cifre de 0, e necesar să oferim un exemplu de completare, iar acesta este prezentat mai jos.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Cea mai mare valoare posibilă a sumei tuturor numerelor din tabel este $\boxed{21}$.

Răspuns corect: $\boxed{21}$ 5p

□

Problema 16

Un număr natural de 4 cifre se numește *încăpățânat,* dacă este scris folosind toate cifrele 1, 2, 3 și 4 și, prin schimbarea locurilor a exact două cifre între ele, nu se poate obține numărul 1234. Câte numere *încăpățânate* există?

Demonstrație. Vom aplica metoda numărării cazurilor complementare. Din totalul numerelor de 4 cifre care se pot scrie folosind fiecare dintre cifrele 1, 2, 3, 4 le eliminăm pe cele din care se poate obține numărul 1234 schimbând locul a exact două cifre între ele.

Pentru a afla câte numere de 4 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2, 3, 4, pe fiecare o singură dată, aplicăm regula produsului: pentru poziția miilor sunt 4 variante de completare, pentru poziția sutelor rămân 3 variante de completare, pentru cifra zecilor două și mai rămâne una pentru cifra unităților, adică $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Un număr care nu este *încăpățânat* are proprietatea că putem alege o pereche de cifre, le schimbăm locurile între ele și obținem numărul 1234. Asta revine la a număra în câte moduri putem alege o pereche de locuri dintre cele 4 pe care le avem la dispoziție. Dacă notăm locurile, în ordine, cu M, S, Z, U, perechile pe care le putem forma sunt (M,S), (M,Z), (M,U), (S,Z), (S,U), (Z,U), adică 6 perechi. Numărul de numere *încăpățânate* este $24 - 6 = \boxed{18}$.

Răspuns corect: $\boxed{18}$ 5p

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: 20p
Total: 100p

Timp de lucru: .... 3 ore