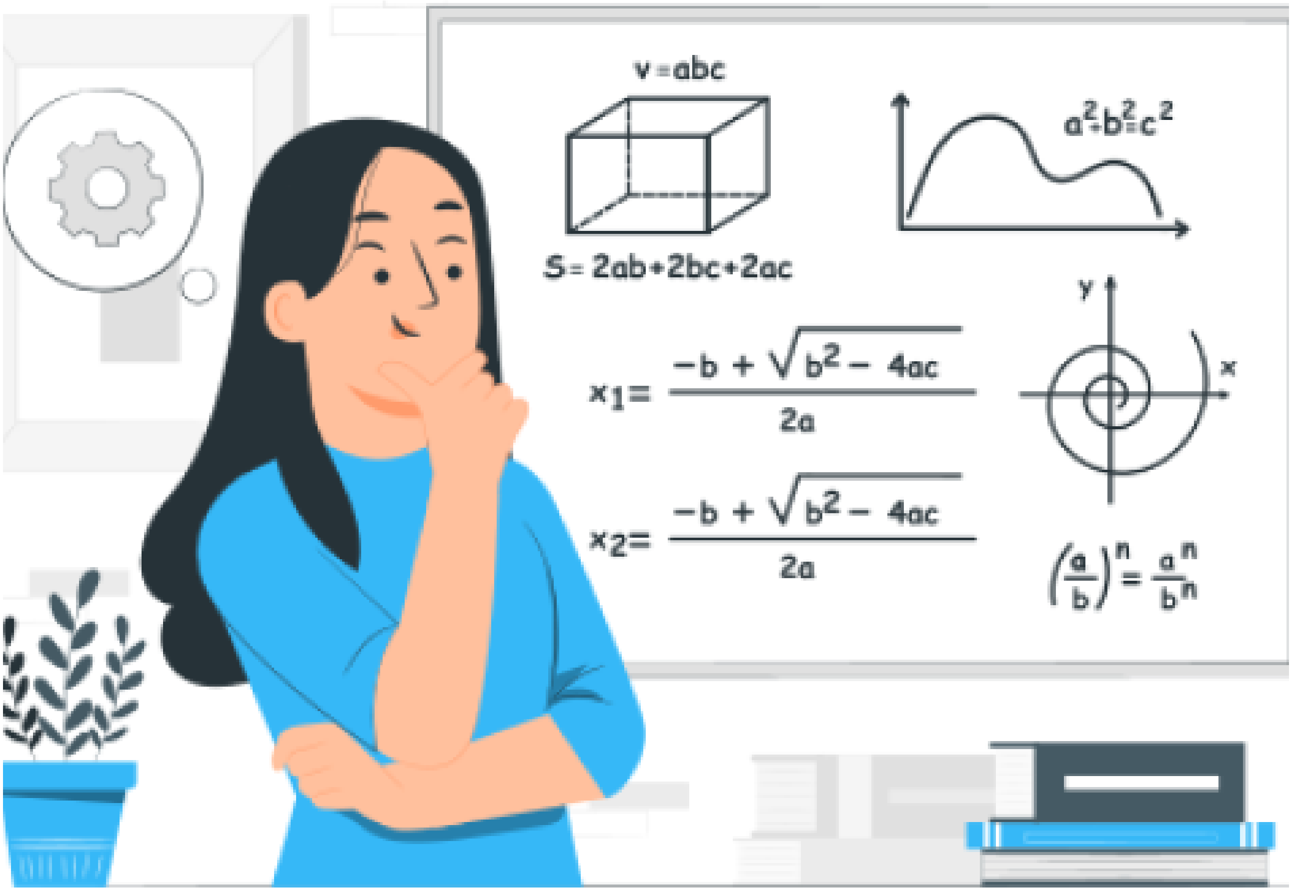


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa II
Clasa a VI-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

§1 Soluții

Problema 1

Să se determine numărul natural $n = 2^a \cdot 3^b$, $a,\ b \in \mathbb{N}$ știind că numărul $2n$ are cu 3 divizori mai mulți ca n, iar $3n$ are cu 4 divizori mai mult ca n.

Notă: Se vor lua în calcul doar divizorii naturali ai unui număr.

Demonstrație. Numărul n are $(a+1)(b+1)$ divizori naturali. Numărul $2n = 2^{a+1} \cdot 3^b$ are $(a+2)(b+1)$ divizori naturali. Numărul $3n = 2^a \cdot 3^{b+1}$ are $(a+1)(b+2)$ divizori naturali.

- $(a+2)(b+1) = (a+1)(b+1) + 3 \iff (a+2)(b+1) - (a+1)(b+1) = 3 \iff (b+1)(a+2-a-1) = 3 \iff b+1 = 3 \iff b = 2$.
- $(a+1)(b+2) = (a+1)(b+1) + 4 \iff (a+1)(b+2) - (a+1)(b+1) = 4 \iff (a+1)(b+2-b-1) = 4 \iff a+1 = 4 \iff a = 3$.

Atunci $n = 2^3 \cdot 3^2 = \boxed{72}$.

Răspuns corect: $\boxed{72}$ .... $5p$

□

Problema 2

Pentru câte perechi de numere naturale (a, b) cu $a + b = 2025$ are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{2}\ ?$$

Demonstrație. $a + b = 2025 \iff a = 2025 - b$ și vom substitui în inegalitate obținând $\frac{a}{b} > \frac{1}{2} \iff \frac{2025-b}{b} > \frac{1}{2} \iff \frac{2(2025-b)}{2b} > \frac{b}{2b} \iff 2(2025-b) > b \iff 4050 - 2b > b \iff 4050 > 3b \iff b < 1350$. Numărul b este diferit de 0 pentru că este numitorul unei fracții, deci $b \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 1349\}$. Cardinalul acestei mulțimi este 1349, deci numărul de valori pe care le poate lua perechea (a, b) este $\boxed{1349}$.

Răspuns corect: $\boxed{1349}$ .... $5p$

□

Problema 3

Se consideră n unghiuri în jurul unui punct, $n \in \mathbb{N}^*$, cu măsurile exprimate prin numere naturale. Să se determine cea mai mare valoare a numărului n, astfel încât măsurile unghiurilor să fie direct proporționale cu $1,\ 3,\ 5, \ldots, 2n-1$.

Demonstrație. Notând cu $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{N}^*$ măsurile unghiurilor avem

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2}{3} = \cdots = \frac{u_n}{2n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{1 + 3 + \cdots + (2n-1)} = \frac{360^\circ}{n^2}.$$

Obținem $\frac{u_1}{1} = \frac{360^\circ}{n^2} \iff u_1 = \frac{360^\circ}{n^2}$ și cum $u_1 \in \mathbb{N}^* \implies n^2 \mid 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Deoarece n este cel mai mare posibil, urmează că $n^2 = 2^2 \cdot 3^2$, deci $n = 6$ și obținem unghiurile $u_1 = 10^\circ$, $u_2 = 30^\circ$, $u_3 = 50^\circ$, $u_4 = 70^\circ$, $u_5 = 90^\circ$, $u_6 = 110^\circ$. Valoarea maximă a numărului n este $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 4

Se consideră numerele a, b, c și d despre care știm :

a) $\{a, b, c, d\} = \{10, 20, 30, 40\}$;

b) $a + b < c + d$;

c) $b + d = c$.

Care este valoarea numărului c?

Demonstrație. Observăm mai întâi că relația $b + d = c$ poate fi obținută cu numerele pe care le avem date în două moduri: $10 + 20 = 30$ sau $10 + 30 = 40$. Adică, numărul c poate fi 30 sau 40.

- Dacă $c = 30$, atunci b și d sunt 10 și 20, iar $a = 40$. Acest caz nu convine pentru că relația b) ar fi $10 + 40 < 20 + 30$ sau $20 + 40 < 10 + 30$, ambele neadevărate;
- Dacă $c = 40$, atunci b și d sunt 10 și 30, iar $a = 20$. Dacă $b = 30$, atunci $d = 10$ și în relația b) am avea egalitate, deci nu convine. Obținem astfel că $b = 10$ și $d = 30$, numere care verifică toate condițiile problemei.

Valoarea numărului c este $\boxed{40}$.

Răspuns corect: $\boxed{40}$ .... $5p$

□

Problema 5

Câte triunghiuri scalene necongruente există cu lungimile laturilor exprimate prin numere naturale, iar două dintre ele sunt egale cu 3, respectiv 4?

Demonstrație. Vom nota cu a lungimea celei de-a $III-$a laturi a triunghiului. Conform inegalității triunghiului, obținem $3 + 4 > a$, deci $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cum triunghiurile pe care le numărăm nu au două laturi congruente, înseamnă că $a \in \{1, 2, 5, 6\}$. Vom verifica dacă tripletele astfel obținute verifică inegalitatea triunghiului, adică dacă suma laturilor de lungime mai mică este mai mare strict decât latura de lungime mai mare.

- pentru $a = 1$ nu se verifică inegalitatea triunghiului pentru că $1 + 3 = 4$;
- pentru $a = 2$ se verifică inegalitatea triunghiului pentru că $2 + 3 > 4$;
- pentru $a = 5$ se verifică inegalitatea triunghiului pentru că $3 + 4 > 5$;
- pentru $a = 6$ se verifică inegalitatea triunghiului pentru că $3 + 4 > 6$.

Numărul triunghiurilor căutate este egal cu $\boxed{3}$

Răspuns corect: $\boxed{3}$ .... $5p$

□

Problema 6

Într-o fermă de iepuri fiecare familie de iepuri are unul sau doi pui. La ultima numărare, 40% dintre puii din fermă au câte un frate. Dacă $p\%$ este procentul familiilor de iepuri din fermă care au un singur pui, să se determine valoarea lui p.

Demonstrație. Vom nota cu x numărul familiilor care au un pui și cu y numărul familiilor care au câte doi pui. Numărul total de pui este $x + 2 \cdot y$. Puii care au câte un frate sunt în număr de $2 \cdot y$. Afirmația 40% *dintre puii din fermă au câte un frate* se scrie $40\% \cdot (x + 2 \cdot y) = 2 \cdot y \iff \frac{40}{100} \cdot (x+2 \cdot y) = 2 \cdot y \iff \frac{2}{5} \cdot (x+2 \cdot y) = 2 \cdot y \iff 2 \cdot x+4 \cdot y = 10 \cdot y \iff 2 \cdot x = 6 \cdot y \iff x = 3 \cdot y$. Numărul de familii este $x + y = 4 \cdot y$. Vom determina p din relația $p\% \cdot 4 \cdot y = x \iff p\% \cdot 4 \cdot y = 3 \cdot y \iff \frac{p}{100} \cdot 4 = 3 \iff \frac{p}{25} = 3 \iff p = \boxed{75}$.

Răspuns corect: $\boxed{75}$ .... $5p$

□

Problema 7

Fie a, b și c cifre distincte nenule pentru care există numerele naturale x și y, astfel încât $\overline{abc} \cdot \overline{cb} = 100 \cdot x^2 + 1$ și $\overline{acb} \cdot \overline{bc} = 100 \cdot y^2 + 1$. Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul $\overline{abbc}$?

Demonstrație. Ultima cifră a numărului $100 \cdot x^2 + 1$ este 1, deci produsul cifrelor b și c are ultima cifră 1. Asta se poate întâmpla pentru perechile de cifre $(1, 1)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$ și $(9, 9)$. Cum cifrele sunt distincte, rezultă că perechile $(1, 1)$ și $(9, 9)$ sunt excluse. Pentru a afla cel mai mic număr $\overline{abbc}$ vom încerca mai întâi, evident, să găsim soluții cu $b = 3$ și $c = 7$. Pentru $a = 1$ obținem $137 \cdot 73 = 100001$ și $173 \cdot 37 = 6401$, deci există numerele naturale x și y pentru care $\overline{abc} \cdot \overline{cb} = 100 \cdot x^2 + 1$ și $\overline{acb} \cdot \overline{bc} = 100 \cdot y^2 + 1$, iar acestea sunt $x = 10$ și $y = 8$. Mai există o soluție în acest caz, $a = 9$, $b = 3$ și $c = 7$. Cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul $\overline{abbc}$ este $\boxed{1337}$.

Răspuns corect: $\boxed{1337}$ .... $5p$

□

Problema 8

Paginile unei cărți sunt numerotate cu numere naturale consecutive începând de la cifra 1. Media aritmetică a paginilor din capitolul 5 este 97 și media aritmetică a numerelor paginilor din capitolul 6 este 116. Câte pagini au în total capitolele 5 și 6?

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi că media aritmetică a unui număr par de numere naturale consecutive nu este număr natural. Fie $a+1, a+2, \ldots, a+n$ cele n numere consecutive, unde $n \in \mathbb{N}$, n par. Media aritmetică a acestor numere este

$$\frac{a + 1 + a + 2 + \ldots + a + n}{n} =$$

$$= \frac{na + \frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{na}{n} + \frac{n(n+1)}{2n} = a + \frac{n+1}{2}.$$

Cum n este număr par, rezultă că fracția $\frac{n+1}{2}$ nu este număr natural.
Cum mediile aritmetice a numerelor care reprezintă paginile din capitolele 5 și 6 sunt numere naturale, înseamnă că în fiecare capitol avem un număr impar de pagini, iar în capitolul 5 pagina 97 este la mijloc și în capitolul 6 pagina din mijloc este 116. Fiecare număr dintre 97 și 116 este număr de pagină în capitolul 5 sau 6. Sunt tot atâtea pagini în capitolul 5 după pagina 97 câte sunt și înainte de 97. Sunt tot atâtea pagini în capitolul 6 după pagina 116, câte sunt și înainte de 116. Asta înseamnă că numărul de pagini din cele două capitole este egal cu dublul numărului de numere dintre 97 și 116 plus încă două, paginile din mijloc, adică $2 \cdot (115 - 98 + 1) + 2 = 2 \cdot 18 + 2 = \boxed{38}$.

Răspuns corect: $\boxed{38}$ .... $5p$

□

Problema 9

Aflați cardinalul mulțimii $A = \{p \in \mathbb{N} \mid \text{p este număr prim și } S = 2^p + p^2 \text{ este număr prim}\}$.

Demonstrație. Analizăm cazurile:

- Cazul $p = 2 \implies S = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ deci suma S nu este număr prim.
- Cazul $p = 3 \implies S = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ deci S este număr prim.
- Cazul $p > 3 \implies p^2$ este de forma $3k + 1$ pentru că pătratele perfecte sunt de forma $3k$ sau $3k + 1$ și cum p este număr prim mai mare decât 3 rezultă p^2 nu este divizibil cu 3. Cum p este număr impar obținem $2^p = (3 - 1)^p = \mathcal{M}_3 - 1 \implies S = 2^p + 3k + 1 = \mathcal{M}_3 - 1 + 3k + 1 = \mathcal{M}_3$. Cum $S > 3$ pentru $p > 3$ rezultă că S este număr compus.

Singura valoare a numărului prim p pentru care S este număr prim este 3, deci cardinalul mulțimii A este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 10

Fie x, y, z trei numere naturale care verifică relația $4 \cdot x + 7 \cdot z = 7 \cdot y + 9$. Care este restul împărțirii numărului $A = 2 \cdot x + y + 5 \cdot z$ la 6?

Revista de Matematică din Timișoara, nr.1/2024

Demonstrație. Observăm din relația $4 \cdot x + 7 \cdot z = 7 \cdot y + 9$ că membrul drept este $\mathcal{M}_7 + 2$. Vom afla care sunt resturile la împărțirea prin 7 pe care le poate avea numărul $4 \cdot x$.

- $x = \mathcal{M}_7 \implies 4 \cdot x = \mathcal{M}_7$
- $x = \mathcal{M}_7 + 1 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 1) = \mathcal{M}_7 + 4$
- $x = \mathcal{M}_7 + 2 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 2) = \mathcal{M}_7 + 1$
- $x = \mathcal{M}_7 + 3 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 3) = \mathcal{M}_7 + 5$
- $x = \mathcal{M}_7 + 4 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 4) = \mathcal{M}_7 + 2$
- $x = \mathcal{M}_7 + 5 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 5) = \mathcal{M}_7 + 6$

- $x = \mathcal{M}_7 + 6 \implies 4 \cdot x = 4 \cdot (\mathcal{M}_7 + 6) = \mathcal{M}_7 + 3$

În consecință, numărul x este de forma $7 \cdot k + 4$ și obținem $4 \cdot x + 7 \cdot z = 7 \cdot y + 9 \iff 4 \cdot (7 \cdot k + 4) + 7 \cdot z = 7 \cdot y + 9 \iff 28 \cdot k + 16 + 7 \cdot z = 7 \cdot y + 9 \iff 28 \cdot k + 7 + 7 \cdot z = 7 \cdot y \iff 4 \cdot k + 1 + z = y$. Îl vom înlocui pe x cu $7 \cdot k + 4$ și pe y cu $4 \cdot k + 1 + z$ în numărul A și obținem $A = 2 \cdot x + y + 5 \cdot z = 2 \cdot (7 \cdot k + 4) + 4 \cdot k + 1 + z + 5 \cdot z = 18 \cdot k + 6 \cdot z + 9 = 6 \cdot (3 \cdot k + z + 1) + 3$. Restul împărțirii numărului A la 6 este egal cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ .... $5p$

□

Problema 11

Segmentul (AB) are lungimea de 2025 cm. O broscuță se află în punctul A și dorește să ajungă la punctul B pe cel mai scurt drum posibil. Pentru aceasta, ea efectuează sărituri în care lungimea fiecărei sărituri este egală cu o putere a lui 2 (adică are forma 2^n, unde $n \in \mathbb{N}$.) Mai mult, niciuna dintre aceste sărituri nu se repetă ca lungime. Câte sărituri îi sunt necesare broscuței să ajungă în punctul B?

Demonstrație. Problema revine la a-l scrie pe 2025 ca sumă de puteri distincte ale lui 2. Fiecare număr natural nenul se poate scrie în mod unic ca sumă de puteri distincte ale lui 2 și asta revine la a-l scrie pe 2025 în baza 2. Scrierea este $2025 = 11111101001_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$. Numărul de sărituri pe care le face broscuța pentru a se deplasa din punctul A în punctul B este $\boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ .... $5p$

□

Problema 12

Care este cea mai mare valoare a numărului natural m pentru care există un număr natural n astfel încât are loc egalitatea

$$(2m+3)(3m+4) = 35^n?$$

Demonstrație. Să observăm mai întâi că pentru $n = 0$ nu se obține soluție și că $2m + 3 \geq 3$ și $3m + 4 \geq 4$.

$$(2m+3)(3m+4) = 35^n \iff (2m+3)(3m+4) = 5^n \cdot 7^n.$$

Vom demonstra că numerele $2m + 3$ și $3m + 4$ sunt prime între ele, asta însemnând că fiecare dintre cei doi factori este fie o putere a lui 5, fie o putere a lui 7, niciunul dintre numere nu este 1 pentru că $2m + 3 \geq 3$ și $3m + 4 \geq 4$. Fie d un divizor comun.

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 2m+3 \\ d \mid 3m+4 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} d \mid 3(2m+3) \\ d \mid 2(3m+4) \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} d \mid 6m+9 \\ d \mid 6m+8 \end{array}\right\} \implies$$

$$d \mid 6m + 9 - 6m - 8 \implies d \mid 1 \iff d = 1.$$

Cum $2m + 3 < 3m + 4$ rezultă

$$\left\{\begin{array}{l} 2m+3 = 5^n \\ 3m+4 = 7^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 6m+9 = 3 \cdot 5^n \\ 6m+8 = 2 \cdot 7^n \end{array}\right.$$

Scădem cele două relații și obținem $3 \cdot 5^n = 2 \cdot 7^n + 1$. Vom împărți prin 7^n ultima ecuație și avem $3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2 + \frac{1}{7^n}$. Pentru $n \geq 2$ rezultă $3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n \leq 3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{75}{49} < 2 < 2 + \frac{1}{7^n}$. Singura soluție a ecuației este $n = 1$. Înlocuind în una dintre ecuațiile sistemului rezultă $m = 1$. Soluția ecuației din enunț este $(m, n) = (1, 1)$. Cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul m este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 13

Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{m + 7 \cdot n}{7 \cdot m + n},\ m, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Demonstrație. Observăm că $0 < \frac{m + 7 \cdot n}{7 \cdot m + n} < 7 \iff m + 7 \cdot n < 7 \cdot (7 \cdot m + n) \iff m + 7 \cdot n < < 49 \cdot m + 7 \cdot n$, relație adevărată pentru că m și n sunt numere naturale nenule. Notând $k = \frac{m + 7 \cdot n}{7 \cdot m + n}$ rezultă $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Este necesar să ne asigurăm că pentru fiecare valoare a lui k găsim numere naturale m și n pentru care $\frac{m + 7 \cdot n}{7 \cdot m + n} = k$.

- Pentru $k = 1 \implies m = n$;
- Pentru $k = 2 \implies 13m = 5n$ și un exemplu este $m = 5$ și $n = 13$;
- Pentru $k = 3 \implies 5m = n$ și un exemplu este $m = 1$ și $n = 5$;
- Pentru $k = 4 \implies 9m = n$ și un exemplu este $m = 1$ și $n = 9$;
- Pentru $k = 5 \implies 17m = n$ și un exemplu este $m = 1$ și $n = 17$;
- Pentru $k = 6 \implies 41m = n$ și un exemplu este $m = 1$ și $n = 41$.

Cardinalul mulțimii A este egal cu $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 14

Pentru numărul natural nenul n vom nota cu $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$ toți divizorii numărului n scriși în ordine crescătoare. Știind că $d_6 = 35$, aflați cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul n.

Demonstrație. Cum 35 este divizor al numărului n, rezultă că și 1, 5, 7 sunt divizori ai numărului n, adică acesta mai are încă doi divizori mai mici decât 35.

- Dacă $2 \mid n$, atunci și $10 \mid n$, $14 \mid n$, adică 35 nu mai este al șaselea divizor, imposibil;
- Dacă $3 \mid n$, atunci și $15 \mid n$, $21 \mid n$, adică 35 nu mai este al șaselea divizor, imposibil;
- Dacă $5^2 \mid n$, atunci n mai are un divizor prim p mai mare decât 7 și mai mic decât 35, iar cea mai mică valoare a lui n se obține pentru $p = 11$;

- Dacă $5^2 \nmid n$, atunci n mai are exact doi divizori primi între 7 și 35, dar în acest caz nu se mai obține valoarea minimă a lui n pentru că $n \geq 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

În concluzie, valoarea minimă pe care o poate lua n este $5^2 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{1925}$.

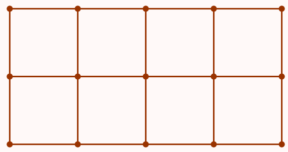
Răspuns corect: $\boxed{1925}$ .... $5p$

$\square$

Problema 15

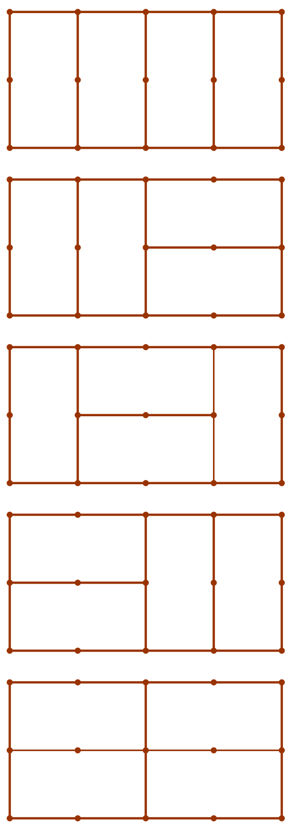
Găsiți numărul de moduri în care putem colora pătratele unitate ale unei table 2×4 în patru culori, astfel încât:

- toate cele patru culori să fie folosite
- fiecare pătrățică să aibă cel puțin o latură comună cu o altă pătrățică de aceeași culoare.



Notă: Se consideră că două colorări sunt diferite chiar dacă una se poate obține din cealaltă prin rotație sau reflexie a tablei.

Demonstrație. Deoarece fiecare pătrățel are o latură comună cu un alt pătrățel de aceeași culoare, trebuie să existe cel puțin două pătrățele din fiecare culoare, dar din moment ce sunt doar 8 pătrățele în total și sunt folosite toate culorile, trebuie să existe exact două pătrățele din fiecare culoare, unele lângă altele, la fel ca piesele de domino. Există 5 moduri de a împărți tabla în patru piese de domino:



Există $4! = 24$ modalități de a colora piesele de domino pentru fiecare dintre cele 5 variante. Numărul total de moduri în care putem realiza cerințele din enunț este $5 \cdot 24 = \boxed{120}$ colorări în total.

Răspuns corect: $\boxed{120}$ . . . . $5p$

□

Problema 16

Aflați numărul natural $\overline{abc}$ verifică relația $\overline{abbc} = \overline{bc}^2$.

Gazeta Matematică nr 5/2018

Demonstrație. Putem scrie $\overline{ab} \cdot 100 + \overline{bc} = \overline{bc}^2$ sau $\overline{ab} \cdot 100 = \overline{bc}(\overline{bc} - 1)$. Deducem că 100 divide $\overline{bc}(\overline{bc} - 1)$. Cum numerele $\overline{bc}$ și $\overline{bc} - 1$ sunt consecutive deci prime între ele, unul se divide cu 25, iar celălalt cu 4 deci ele pot fi 25 și 24, respectiv 76 și 75. Pentru $\overline{bc} = 25$ nu avem soluții, iar pentru $\overline{bc} = 76$ găsim $\overline{bc}^2 = \overline{5776}$, deci $\overline{abc} = \boxed{576}$.

Răspuns corect: $\boxed{576}$ . . . . $5p$

□

Problemele 1-16: . . . . $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $20p$
Total: . . . . $100p$

Timp de lucru: . . . . 3 ore