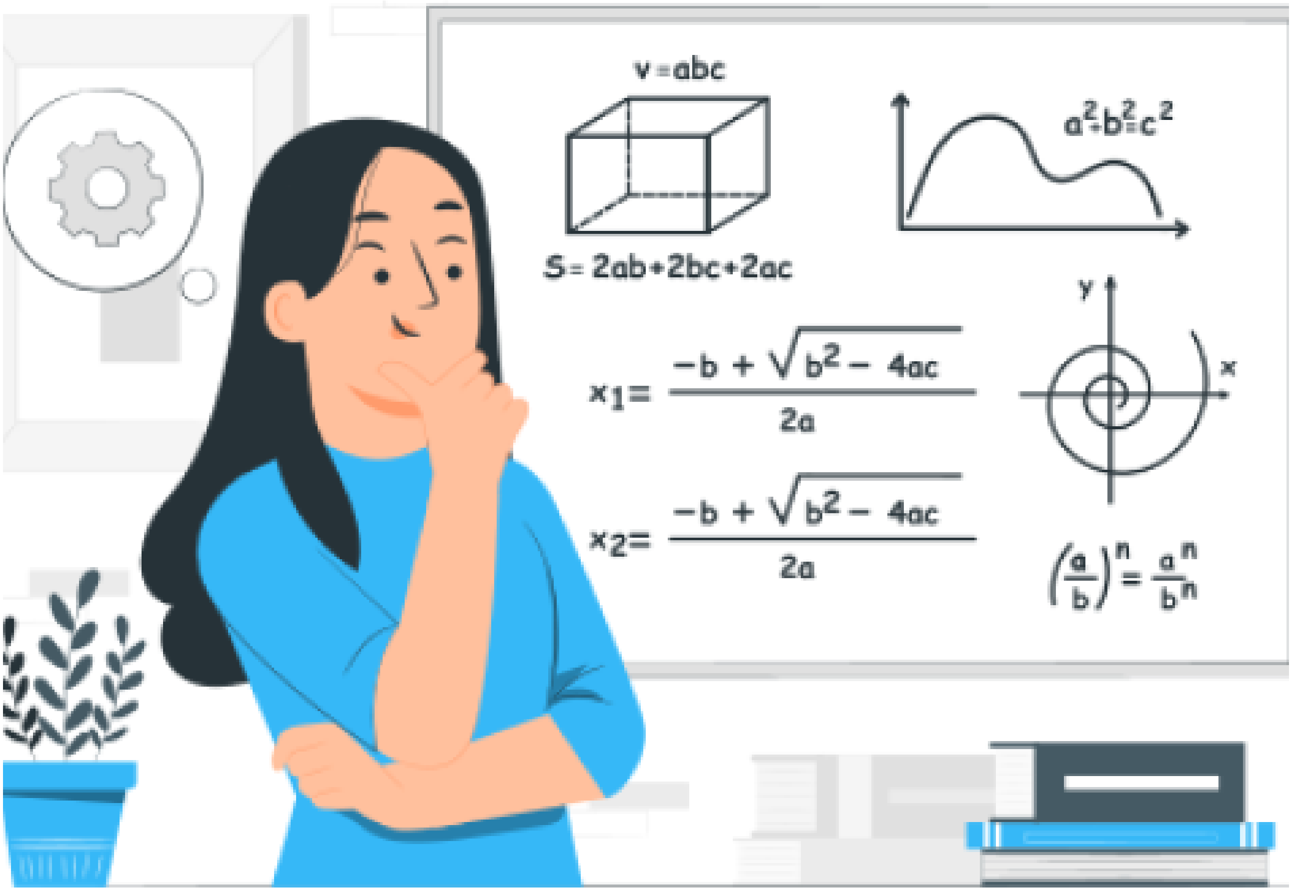



# Concursul de matematică Upper.School
## Ediția 2024-2025

## Etapa II
## Clasa a VII-a

## - Soluții -
**Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu**

# §1 Soluții

**Problema 1**

Dacă $0 < x < y$ și $(x-y)(3x-2y) = 2xy$ aflați valoarea fracției $\dfrac{x+y}{y-x}$.

*Demonstrație.* $(x-y)(3x-2y) = 2xy \iff 3x^2 - 5xy + 2y^2 = 2xy \iff 3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0 \iff 3x^2 - 6xy - xy + 2y^2 = 0 \iff 3x(x-2y) - y(x-2y) = 0 \iff (x-2y)(3x-y) = 0 \iff$
$\iff \dfrac{y}{x} \in \left\{\dfrac{1}{2}, 3\right\}$. Din $0 < x < y \implies \dfrac{y}{x} > 1 \implies y = 3x$ deci $\dfrac{x+y}{y-x} = \dfrac{3x+x}{3x-x} = \dfrac{4x}{2x} = \boxed{2}$.

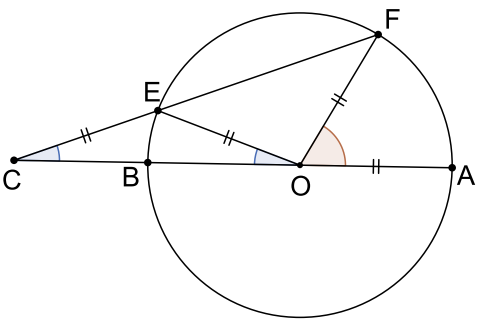
**Răspuns corect:** $\boxed{2}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $5p$

□

**Problema 2**

Fie cercul $\Gamma$ cu centrul $O$ și raza $R$, iar $E,\ F \in \Gamma$. Se prelungește semidreapta $(FE$ cu $EC = R$. Dacă dreapta $CO$ taie cercul în $A$ și $B$, $B \in (OC)$ și $m(\angle ACF) = 20°$, aflați măsura unghiului $\angle AOF$.

*Demonstrație.* În triunghiul isoscel $OEC$, $\angle ECO = 20°$, $OE = EC \implies \angle EOC = \angle ECO = 20°$. De aici obținem $\angle OEC = 180° - 20 \cdot 2 = 140°$.
$\angle OEC + \angle OEF = 180° \implies \angle OEF = 180° - 140° = 40°$.
În triunghiul isoscel $\triangle OFE$, $\angle FOE = 180° - 2 \cdot 40° \implies \angle FOE = 100°$.
$\angle AOF = 180° - \angle FOE - \angle EOC \implies \angle AOF = 180° - 100° - 20° \implies$ măsura unghiului $\angle AOF$ este egală cu $\boxed{60°}$.




**Răspuns corect:** $\boxed{60}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $5p$

□

**Problema 3**

Pe un arc de centru $O$ se află punctele $A$, $B$, $C$, $D$ în această ordine, astfel încât $3 \cdot m(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot m(\overset{\frown}{BC})$, $m(\overset{\frown}{BC}) = \dfrac{3}{4} \cdot m(\overset{\frown}{CD})$ și $9 \cdot m(\overset{\frown}{CD}) = 4 \cdot m(\overset{\frown}{DA})$ Care este măsura unghiului $\angle BAD$.

*Demonstrație.* Rescriem relațiile dintre măsurile arcelor:

- $3 \cdot m(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot m(\overset{\frown}{BC}) \mid : 6 \iff \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{3}$;
- $m(\overset{\frown}{BC}) = \dfrac{3}{4} \cdot m(\overset{\frown}{CD}) \mid \cdot \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{3} = \dfrac{m(\overset{\frown}{CD})}{4}$;

- $9 \cdot m(\overparen{\mathrm{CD}}) = 4 \cdot m(\overparen{\mathrm{DA}}) \mid : 36 \iff \dfrac{m(\overparen{\mathrm{CD}})}{4} = \dfrac{m(\overparen{\mathrm{DA}})}{9}$.

Obținem astfel un șir de rapoarte egale și aplicăm proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale:

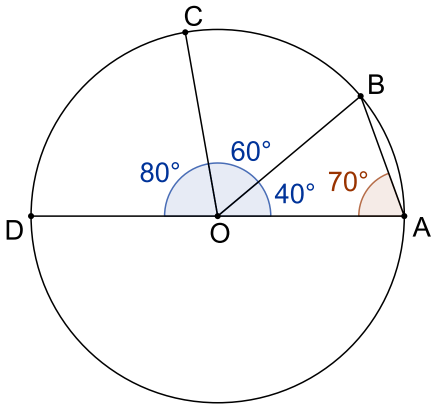
$$\frac{m(\overparen{\mathrm{AB}})}{2} = \frac{m(\overparen{\mathrm{BC}})}{3} = \frac{m(\overparen{\mathrm{CD}})}{4} = \frac{m(\overparen{\mathrm{DA}})}{9} =$$
$$= \frac{m(\overparen{\mathrm{AB}}) + m(\overparen{\mathrm{BC}}) + m(\overparen{\mathrm{CD}}) + m(\overparen{\mathrm{DA}})}{2+3+4+9} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ.$$

Rezultă că

$$m(\overparen{\mathrm{AB}}) = 40^\circ,\ m(\overparen{\mathrm{BC}}) = 60^\circ,\ m(\overparen{\mathrm{CD}}) = 80^\circ,\ m(\overparen{\mathrm{DA}}) = 180^\circ.$$

Obținem

$$m(\angle BAD) = \frac{m(\overparen{\mathrm{BC}}) + m(\overparen{\mathrm{CD}})}{2} = \frac{140^\circ}{2} = \boxed{70^\circ}.$$




**Răspuns corect:** $\boxed{70}$ ................................................................ $5p$

□

**Problema 4**

Care este soluția reală a ecuației

$$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x+3)^2} = 14(x-4)?$$

*Demonstrație.* $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x+3)^2} = 14(x-4) \iff |x-3|+|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3| = 14(x-4)$. Deoarece $\sqrt{x} \geq 0$ rezultă că $x-4 \geq 0 \iff x \geq 4$, deci fiecare număr din modul este mai mare sau egal decât 0 și ecuația devine $x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3 = 14(x-4) \iff 7x = 14(x-4) \iff x = 2x-8 \iff x = \boxed{8}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{8}$ ................................................................ $5p$

□

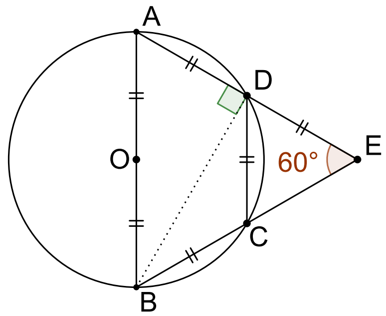
**Problema 5**

Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}(O,R)$, astfel încât $AD = BC = 3$ cm, $AB = 6$ cm și $AB > CD$. Dacă $AD \cap BC = \{E\}$ și $m(\angle AEB) = 60^\circ$, aflați lungimea, exprimată în cm, a razei cercului $\mathcal{C}(O,R)$.

*Demonstrație.* $AD = BC \implies \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ pentru că într-un cerc la coarde congruente corespund arce congruente. Două arce congruente determină între ele coarde paralele, deci $AB \parallel CD$. Prin urmare, $ABCD$ este un trapez isoscel cu $DC \parallel AB$, baza mare este $AB$ și unghiurile alăturate bazei mari sunt congruente, deci $\angle A = \angle B \implies \triangle ABE$ este triunghi isoscel cu un unghi de $60°$, adică este echilateral de latură 6 cm. Cum $AD = 3$ cm $\implies AD = DE = \dfrac{AE}{2}$, adică $D$ este mijlocul lui $(AE) \implies BD$ este mediană în triunghiul echilateral $\triangle ABE$. Atunci, $BD$ este și înălțime și obținem:

$$BD \perp AE \implies m(\angle ADB) = 90° \implies m(\overset{\frown}{AB}) = 180°$$

Așadar, $AB$ este diametrul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ și raza cercului este egală cu $\dfrac{AB}{2} = \boxed{3}$ cm.




**Răspuns corect:** $\boxed{3}$ ........................................................ 5*p*

□

**Problema 6**

Determinați $\overline{aba} \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$\sqrt{\overline{aba}} = \frac{a^2}{3} + 2b.$$

*Demonstrație.* $\dfrac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{\overline{aba}} \in \mathbb{Q}$, dar $\overline{aba} \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $\overline{aba}$ este pătrat perfect. Pe de altă parte $\dfrac{a^2}{3} \in \mathbb{N} \implies 3 \mid a^2$. Cum 3 este prim, rezultă $3 \mid a$. Adică $a \in \{3, 6, 9\}$.

- Pentru $a = 3$ nu există soluție pentru că ultima cifră a numărului $\overline{aba}$ este 3, iar pătratele perfecte nu pot avea ultima cifră 3;
- Pentru $a = 6$ singurul pătrat perfect de forma $\overline{6b6}$ este numărul $676 = 26^2$ care verifică ecuația pentru că $\sqrt{676} = \dfrac{6^2}{3} + 2 \cdot 7$;
- Pentru $a = 9$ nu există pătrate perfecte de forma $\overline{9b9}$, deoarece singurele pătrate perfecte de 3 cifre care au cifra sutelor egală cu 9 sunt 900 și 961.

Singurul număr care corespunde cerințelor problemei este $\boxed{676}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{676}$ ........................................................ 5*p*

□

**Problema 7**

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ și

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}.$$

Aflați partea întreagă a numărului $a_{2025}$.

*Demonstrație.* Suma are $n+1$ termeni, cel mai mare fiind $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ și cel mai mic $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$, deci

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} < a_n < \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Vom demonstra că $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} > 1$ și $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} < 2$.

$\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} > 1 \iff n^2+2n+1 > n^2+n+1 \iff n > 0$, ceea ce este adevărat.

$\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} < 2 \iff (n+1)^2 < 4n^2+4 \iff n^2+2n+1 < 4n^2+4 \iff 2n < 3n^2+3 \iff$ $0 < (n-1)^2 + 2n^2 + 2$, de asemenea adevărat.

Am demonstrat astfel că $1 < a_n < 2$, deci partea întreagă a numărului $a_{2025}$ este egală cu $\boxed{1}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{1}$ ........................................................................ 5p

□

**Problema 8**

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ aflați ultima cifră a numărului $A = \dfrac{2 \cdot 36^n + 7 \cdot 6^n - 4}{2 \cdot 6^n - 1}$.

*Demonstrație.* Vom descompune în factori numărătorul și vom demonstra că numărul $A$ este număr natural.

$$A = \frac{2 \cdot 36^n + 7 \cdot 6^n - 4}{2 \cdot 6^n - 1} = \frac{2 \cdot 6^{2n} - 6^n + 8 \cdot 6^n - 4}{2 \cdot 6^n - 1} = \frac{(2 \cdot 6^n - 1)(6^n + 4)}{2 \cdot 6^n - 1} = 6^n + 4.$$

Cum $n \neq 0 \implies u(6^n) = 6 \implies u(A) = u(6^n + 4) = u(6+4) = \boxed{0}$.

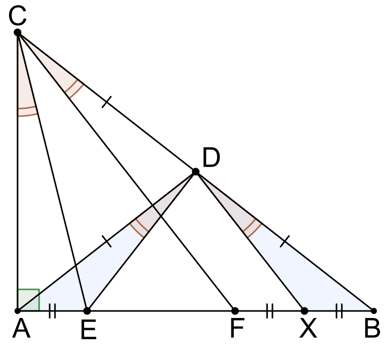
**Răspuns corect:** $\boxed{0}$ ........................................................................ 5p

□

**Problema 9**

Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90°$, $E,\ F \in (AB)$, astfel încât $\angle ACE = \angle FCB = 14°$, $FB = 2AE$ și $D =$ mijlocul ipotenuzei. Aflați măsura unghiului $\angle ADE$.

*Demonstrație.* Vom nota cu $X$ mijlocul segmentului $(FB) \implies FX = XB = AE$. $AD$ este mediană în triunghiul dreptunghic, deci $AD = DB \implies \triangle ADB$ este isoscel și $\angle DAE = \angle XBD$. Obținem, astfel, că $\triangle DAE \equiv \triangle DBX \implies \angle ADE \equiv \angle XDB$.




În $\triangle CFB, DX$ este linie mijlocie, deci $DX \parallel CF \implies \angle XDB = \angle FCB = 14^\circ$ pentru că sunt unghiuri corespondente. Din $\angle XDB = 14^\circ$ și $\angle ADE = \angle XDB \implies \boxed{\angle ADE = 14^\circ}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{14}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 10**

Câte perechi de numere naturale nenule $(a, b)$ verifică relația

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{a - 2\sqrt{b}} + \sqrt{b}?$$

*Demonstrație.* Rescriem relația astfel:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} - \sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{b}$$

Prin ridicare la pătrat, obținem:

$$a + 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a^2 - 4b} + a - 2\sqrt{b} = b \iff 2a - b = 2\sqrt{a^2 - 4b}$$

Se impune condiția $2a - b \geq 0$ (1) pentru că în ultima relație avem egalitate cu un radical care este mai mare sau egal decât 0. Ridicăm din nou la pătrat și avem

$$4a^2 - 4ab + b^2 = 4a^2 - 16b \iff b^2 = 4ab - 16b$$

Cum $b \neq 0$ obținem $4a - 16 = b > 0 \implies 4a - 16 > 0 \implies a > 4 \implies a \geq 5$.
Dar din condiția (1) avem $2a - b \geq 0 \iff 2a \geq 4a - 16 \iff a \leq 8$. Soluțiile ecuației sunt $(a, b) = (a,\ 4a - 16)$, unde $a \in \{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Numărul soluțiilor ecuației este egal cu $\boxed{4}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{4}$ ........................................................ $5p$

□

**Problema 11**

Se consideră mulțimea $M = \left\{ \frac{a}{\overline{ba}} + \frac{b}{\overline{ab}} \mid a, b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}$. Dacă cel mai mic element din mulțimea $M$ este numărul rațional $\frac{p}{q}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, să se afle valoarea produsului $p \cdot q$.

*Demonstrație.* $\frac{a}{\overline{ba}} + \frac{b}{\overline{ab}} > 0$, deoarece $a > 0$ și $b > 0$. Însă $\frac{a}{\overline{ba}} + \frac{b}{\overline{ab}} = \frac{a \cdot \overline{ab} + b \cdot \overline{ba}}{\overline{ab} \cdot \overline{ba}} = \frac{10(a^2 + b^2) + 2ab}{10(a^2 + b^2) + 101ab} < 1$ pentru că $2ab < 101ab$. Deci $0 < \frac{a}{\overline{ba}} + \frac{b}{\overline{ab}} < 1$. Pentru a obține valoarea celui mai mic element din mulțime vom observa că, pentru $a = b$, numărul $\frac{a}{\overline{ba}} + \frac{b}{\overline{ab}}$ este egal cu $\frac{a}{\overline{aa}} + \frac{a}{\overline{aa}} = \frac{2}{11}$. Vom demonstra că aceasta este valoarea minimă, adică fiecare element al mulțimii este mai mare sau egal cu $\frac{2}{11}$. Avem

$$\frac{10(a^2+b^2)+2ab}{10(a^2+b^2)+101ab} \geq \frac{2}{11} \iff 110(a^2+b^2)+22ab \geq 20(a^2+b^2)+202ab$$

$$\iff a^2+b^2 \geq 2ab \iff (a-b)^2 \geq 0.$$

Egalitatea se obține dacă $a = b$. Deci cel mai mic element al mulțimii $M$ este $\frac{2}{11}$, iar valoarea produsului $p \cdot q$ este egală cu $2 \cdot 11 = \boxed{22}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{22}$ ............................................................ $5p$

□

**Problema 12**

Se știe că

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} + \frac{z^2}{z+3} = x+y+z+106,$$

unde $x$, $y$, $z$ sunt numere reale astfel încât $x \neq -1$, $y \neq -2$ și $z \neq -3$. Aflați valoarea expresiei

$$\frac{1}{4x+4} + \frac{1}{y+2} + \frac{9}{4z+12}.$$

*Demonstrație.*

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} + \frac{z^2}{z+3} = x+y+z+106 \iff \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} + \frac{z^2}{z+3} - x - y - z = 106.$$

- $\frac{x^2}{x+1} - x = \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \frac{-x}{x+1} = \frac{1-1-x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1+x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1.$
- $\frac{y^2}{y+2} - y = \frac{y^2 - y^2 - 2y}{y+2} = \frac{-2y}{y+2} = \frac{4-4-2y}{y+2} = \frac{4}{y+2} - \frac{4+2y}{y+2} = \frac{4}{y+2} - 2.$
- $\frac{z^2}{z+3} - z = \frac{z^2 - z^2 - 3z}{z+3} = \frac{-3z}{z+3} = \frac{9-9-3z}{z+3} = \frac{9}{z+3} - \frac{9+3z}{z+3} = \frac{9}{z+3} - 3.$

Obținem $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} + \frac{z^2}{z+3} - x - y - z = 106 \iff \frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} + \frac{9}{z+3} = 112 \iff$ $\iff \frac{1}{4x+4} + \frac{1}{y+2} + \frac{9}{4z+12} = \boxed{28}$.

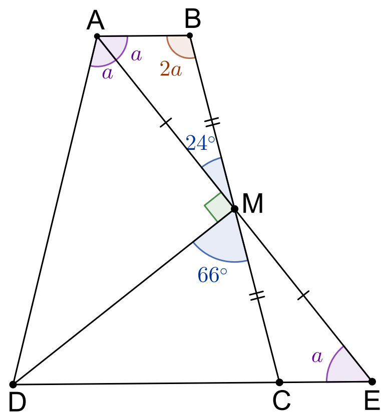
**Răspuns corect:** $\boxed{28}$ ............................................................ $5p$

□

**Problema 13**

În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AD = BC$, fie $M$ mijlocul segmentului $(BC)$. Dacă $m(\angle AMB) = 24°$ și $m(\angle CMD) = 66°$, aflați măsura unghiului $\angle ABC$.

*Demonstrație.* Prelungim $AM$ până se intersectează cu $DC$ în $E$.




Observăm că:

- $\angle CME \equiv \angle BMA$, fiind opuse la vârf, deci $\angle DME = \angle DMC + \angle CME = 66° + 24° = 90° \iff DM \perp AE$;
- $\left.\begin{array}{l} BM = MC \\ \angle BMA = \angle CME \\ \angle ABM = \angle ECM \end{array}\right\} \implies \triangle ABM \equiv \triangle ECM \implies AM = ME$

Din aceste două observații rezultă că $DM$ este mediatoarea segmentului $(AE) \implies \triangle ADE$ este isoscel cu $DA = DE \implies \angle DAE \equiv \angle DEA = a$. Pe de altă parte, $AB \parallel DE \implies \angle BAE \equiv \angle DEA = a$. Trapezul $ABCD$ este isoscel, deci $\angle ABC \equiv \angle DAB = 2a$. În $\triangle ABM$ suma măsurilor unghiurilor este $180° \implies a + 2a + 24° = 180° \iff a = 52°$. Măsura unghiului $\angle ABC$ este egală cu $\boxed{104°}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{104}$ ........................................................ 5$p$

□

## Problema 14

Dacă $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aflați valoarea maximă a expresiei

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - x_5|.$$

*Demonstrație.* Vom numi *termeni* diferențele de tipul $|x_i - x_{i+1}|$ și vom face câteva observații:

- valorile pe care le pot lua cei 4 termeni sunt 4, 3, 2 și 1;
- doar unul dintre termeni poate fi egal cu 4 și anume $|5 - 1|$ sau $|1 - 5|$, adică 1 și 5 sunt numere consecutive în șirul $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$.
- doi dintre termeni pot fi egali cu 3 și anume $|5 - 2| = |2 - 5|$ sau $|4 - 1| = |1 - 4|$;
- celelalte valori pe care le pot lua termenii sunt 2 sau 1.

În suma $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - x_5|$ sunt 4 termeni. Cea mai mare valoare a acestei sume s-ar obține cu un termen 4, doi termeni 3 și unul egal cu 2. Acest lucru nu este posibil pentru că:

- 1 trebuie să stea între 4 și 5;
- 5 trebuie să stea între 1 și 2.

Asta conduce la ordinea $2,\ 5,\ 1,\ 4$ sau $4,\ 1,\ 5,\ 2$, iar 3 poate să fie doar unul dintre capete și, indiferent unde poziționat, termenul din care face parte este egal cu 1. Deci valoarea maximă nu poate fi 12, iar pentru 11 avem exemplul $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$ și $x_5 = 4$. Valoarea maximă a expresiei este $\boxed{11}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{11}$ ................................................................ $5p$

□

**Problema 15**

Aflați suma numerelor de forma $\overline{ab}$ astfel încât

$$\frac{a+1}{b} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}.$$

*Demonstrație.* Fracția $\dfrac{m}{n}$ este număr natural dacă și numai dacă $n \mid m$. O condiție necesară care rezultă de aici este $n \leq m$. Astfel, $\dfrac{a+1}{b} \in \mathbb{N} \implies b \leq a+1$ și din $\dfrac{b+1}{a} \in \mathbb{N} \implies a \leq b+1$. Corelând cele două inegalități obținem $b \leq a+1 \leq b+2 \implies a+1 \in \{b,\ b+1,\ b+2\}$.

- Dacă $a+1 = b$ cele două fracții devin $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{b}{b} = 1 \in \mathbb{N}$ și $\dfrac{b+1}{a} = \dfrac{a+2}{a} = \dfrac{a}{a} + \dfrac{2}{a} \in \mathbb{N} \implies a \in \{1, 2\}$. Numerele $\overline{ab}$ sunt 12 și 23.
- Dacă $a+1 = b+1 \iff a = b$ cele două fracții devin $\dfrac{a+1}{a} = \dfrac{a}{a} + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{N} \implies a = 1$. Numărul $\overline{ab}$ este 11.
- Dacă $a+1 = b+2 \iff a = b+1$, prima fracție devine $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{b+2}{b} = \dfrac{b}{b} + \dfrac{2}{b} \in \mathbb{N} \implies b \in \{1, 2\}$. A doua fracție este $\dfrac{b+1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N}$. Numerele $\overline{ab}$ sunt 21 și 32.

Suma numerelor care respectă cerințele problemei este $12 + 23 + 11 + 21 + 32 = \boxed{99}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{99}$ ................................................................ $5p$

□

**Problema 16**

Fie $a$, $b$ și $c$ trei numere prime care verifică relația $a + b = c$. Știind că media aritmetică a două dintre ele este cu 4 mai mică decât de 4 ori puterea a patra a celui de-al treilea număr, să se determine care este cea mai mare valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre numere.

*Demonstrație.* Din $a + b = c$ observăm că unul dintre numerele $a$ și $b$ este 2, altfel suma $a + b$ este număr par cel puțin egală cu 6 și atunci $c$ nu este număr prim. Vom alege ca $a = 2$. În plus, numărul $c$ este cel mai mare dintre numere. A doua parte a ipotezei se scrie $\dfrac{x+y}{2} = 4z^4 - 4$, unde $\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$. De aici rezultă mai întâi că $\dfrac{x+y}{2} \in \mathbb{Z}$, deci $x + y \,\vdots\, 2$, adică $x$ și $y$ au aceeași paritate, prim urmare $z = 2$ și $x + y = b + c$. Obținem astfel, $\dfrac{b+c}{2} = 4 \cdot 2^4 - 4 \iff b + c = 120$. Mai știm și că $c = b + 2$, de aici obținem valorile $b = 59$ și $c = 61$. Cea mai mare valoare a celui mai mare dintre cele trei numere este $\boxed{61}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{61}$ . . . . . . . . . . 5$p$

□

**Problemele 1-16:** . . . . . . . . . . $16 \times 5p = 80p$
**Puncte acordate din oficiu:** . . . . . . . . . . $20p$
**Total:** . . . . . . . . . . $100p$

**Timp de lucru:** . . . . . . . . . . 3 ore