



Concursul de matematică Upper.School  
Ediția 2024-2025

Etapa II  
Clasa a VII-a

- Subiecte -  
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

## §1 Subiecte

### Problema 1

Dacă  $0 < x < y$  și  $(x - y)(3x - 2y) = 2xy$  aflați valoarea fracției  $\frac{x + y}{y - x}$ .

### Problema 2

Fie cercul  $\Gamma$  cu centrul  $O$  și raza  $R$ , iar  $E, F \in \Gamma$ . Se prelungește semidreapta  $(FE$  cu  $EC = R$ . Dacă dreapta  $CO$  taie cercul în  $A$  și  $B$ ,  $B \in (OC)$  și  $m(\angle ACF) = 20^\circ$ , aflați măsura unghiului  $\angle AOF$ .

### Problema 3

Pe un arc de centru  $O$  se află punctele  $A, B, C, D$  în această ordine, astfel încât  $3 \cdot m(\widehat{AB}) = 2 \cdot m(\widehat{BC})$ ,  $m(\widehat{BC}) = \frac{3}{4} \cdot m(\widehat{CD})$  și  $9 \cdot m(\widehat{CD}) = 4 \cdot m(\widehat{DA})$ . Care este măsura unghiului  $\angle BAD$ .

### Problema 4

Care este soluția reală a ecuației

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} = 14(x-4)?$$

### Problema 5

Patrulaterul  $ABCD$  este înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , astfel încât  $AD = BC = 3$  cm,  $AB = 6$  cm și  $AB > CD$ . Dacă  $AD \cap BC = \{E\}$  și  $m(\angle AEB) = 60^\circ$ , aflați lungimea, exprimată în cm, a razei cercului  $\mathcal{C}(O, R)$ .

### Problema 6

Determinați  $\overline{aba} \in \mathbb{N}$  cu proprietatea că

$$\sqrt{\overline{aba}} = \frac{a^2}{3} + 2b.$$

### Problema 7

Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  și

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}.$$

Aflați partea întregă a numărului  $a_{2025}$ .

**Problema 8**

Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  aflați ultima cifră a numărului  $A = \frac{2 \cdot 36^n + 7 \cdot 6^n - 4}{2 \cdot 6^n - 1}$ .

**Problema 9**

Fie  $\triangle ABC$  cu  $\angle A = 90^\circ$ ,  $E, F \in (AB)$ , astfel încât  $\angle ACE = \angle FCB = 14^\circ$ ,  $FB = 2AE$  și  $D =$  mijlocul ipotenuzei. Aflați măsura unghiului  $\angle ADE$ .

**Problema 10**

Câte perechi de numere naturale nenule  $(a, b)$  verifică relația

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{a - 2\sqrt{b}} + \sqrt{b}?$$

**Problema 11**

Se consideră mulțimea  $M = \left\{ \frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \right\}$ . Dacă cel mai mic element din mulțimea  $M$  este numărul rațional  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ ,  $(p, q) = 1$ , să se afle valoarea produsului  $p \cdot q$ .

**Problema 12**

Se știe că

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2} + \frac{z^2}{z+3} = x + y + z + 106,$$

unde  $x, y, z$  sunt numere reale astfel încât  $x \neq -1$ ,  $y \neq -2$  și  $z \neq -3$ . Aflați valoarea expresiei

$$\frac{1}{4x+4} + \frac{1}{y+2} + \frac{9}{4z+12}.$$

**Problema 13**

În trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$  și  $AD = BC$ , fie  $M$  mijlocul segmentului  $(BC)$ . Dacă  $m(\angle AMB) = 24^\circ$  și  $m(\angle CMD) = 66^\circ$ , aflați măsura unghiului  $\angle ABC$ .

**Problema 14**

Dacă  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , aflați valoarea maximă a expresiei

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - x_5|.$$

**Problema 15**

Aflați suma numerelor de forma  $\overline{ab}$  astfel încât

$$\frac{a+1}{b} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}.$$

**Problema 16**

Fie  $a$ ,  $b$  și  $c$  trei numere prime care verifică relația  $a + b = c$ . Știind că media aritmetică a două dintre ele este cu 4 mai mică decât de 4 ori puterea a patra a celui de-al treilea număr, să se determine care este cea mai mare valoare pe care o poate lua cel mai mare dintre numere.

<b>Problemele 1-16:</b> .....	$16 \times 5p = 80p$
<b>Puncte acordate din oficiu:</b> .....	$20p$
<b>Total:</b> .....	$100p$
<b>Timp de lucru:</b> .....	3 ore