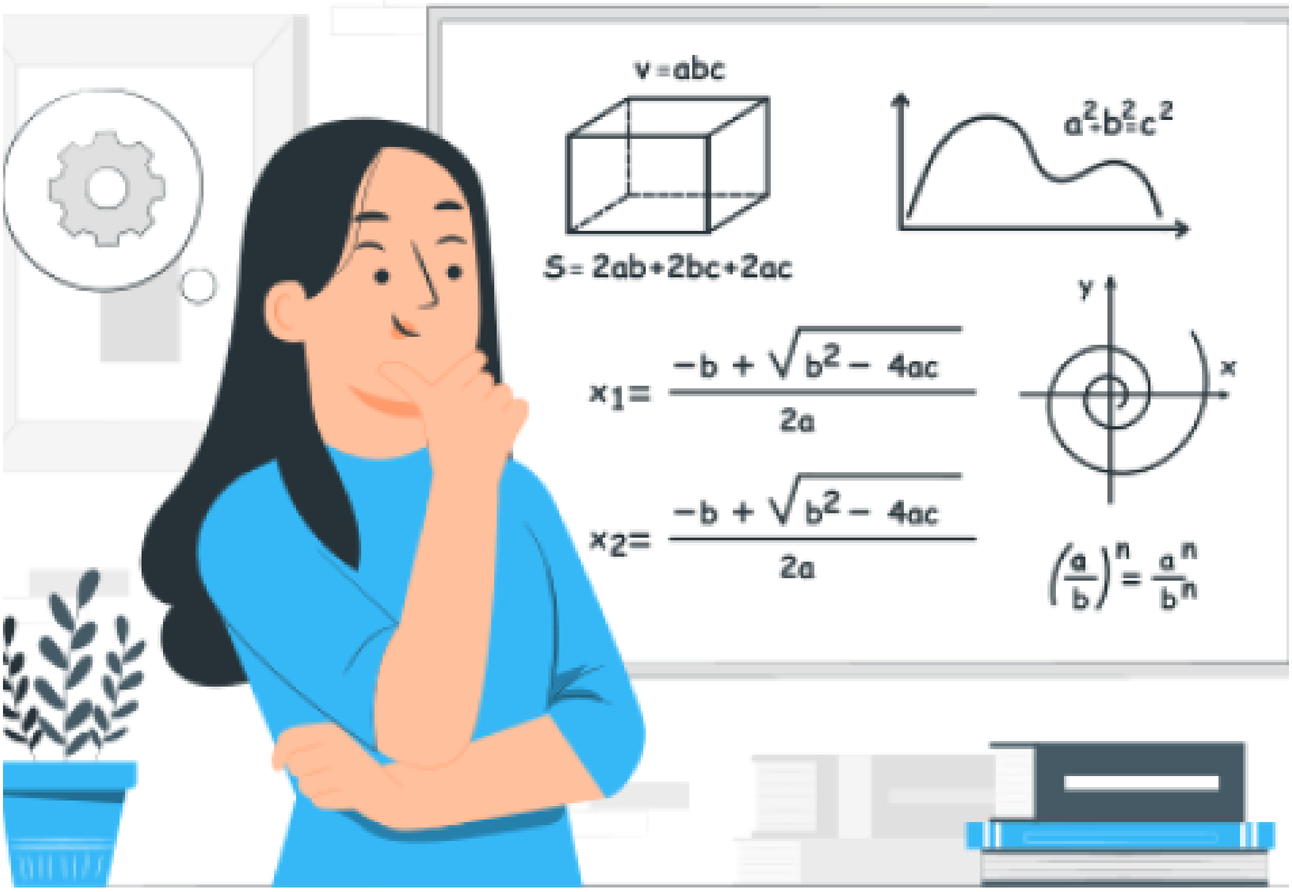


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Avem la dispoziție 150 de cubulețe identice, din care trebuie să construim cel mai mare cub posibil. Câte cubulețe rămân nefolosite?

Demonstrație. Latura cubului construit are lungimea egală cu numărul de cuburi pe care le punem pe o latură. Volumul cubului este l^3, deci este cub perfect. Cel mai mare cub perfect mai mic ca 150 este $5^3 = 125$. Numărul de cuburi mici care rămân nefolosite este $150 - 125 = \boxed{25}$.

Răspuns corect: $\boxed{25}$ .... $5p$

□

Problema 2

Fie p un număr prim și x, y numere întregi. Știind că $9xy = p(p + 3x + 6y)$, găsiți valoarea maximă posibilă pentru $p^2 + x^2 + y^2$.

Demonstrație. Deoarece $9xy$ este divizibil cu $9 \implies p(p + 3x + 6y) \vdots 9$. Cum p și $p + 3x + 6y$ dau același rest la împărțirea prin 3 pentru că diferența lor este divizibilă cu 3, obținem că ambele dau restul 0, deci $p = 3$, acesta fiind singurul număr prim divizibil cu 3. Ecuația devine $9xy = 9 + 9x + 18y \iff xy - x - 2y - 1 = 0 \iff (x - 2)(y - 1) = 3$. Se obțin soluțiile $(x-2, y-1) \in \{(-3, -1), (-1, -3), (3, 1), (1, 3)\} \iff (x, y) \in \{(-1, 0), (1, -2), (5, 2), (3, 4)\}$. Cea mai mare valoare a sumei $p^2 + x^2 + y^2$ se obține pentru $x = 5$ și $y = 2$ și aceasta este $p^2 + x^2 + y^2 = \boxed{38}$.

Răspuns corect: $\boxed{38}$ .... $5p$

□

Problema 3

Valoarea minimă a sumei $S = \frac{9x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy}$, unde $x > 0$, $y > 0$ este egală cu fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Să se afle valoarea expresiei $a^2 + b^2$.

Demonstrație. Aplicăm inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică și obținem

$$\frac{9x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geq 2\sqrt{\frac{9x^3}{y} \cdot \frac{y^3}{x}} = 6\sqrt{x^2y^2} \implies S \geq 6xy - \sqrt{xy}.$$

Adunăm și scădem $\frac{6}{144} = \frac{1}{24}$ pentru a forma un pătrat și obținem

$$S \geq 6\left(xy - \frac{\sqrt{xy}}{6} + \frac{1}{144}\right) - \frac{6}{144} = 6\left(\sqrt{xy} - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{6}{144} = 6\left(\sqrt{xy} - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{24}.$$

Minimul sumei se obține dacă $6\left(\sqrt{xy} - \frac{1}{12}\right)^2 = 0$, deci $\frac{a}{b} = -\frac{1}{24}$. Așadar, $a = -1$ și $b = 24$, valoarea sumei pătratelor celor două numere este $a^2 + b^2 = \boxed{577}$.

Răspuns corect: $\boxed{577}$ .... $5p$

□

Problema 4

Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care $\left[\dfrac{3a-2}{7}\right] = \left[\dfrac{108}{5a-6}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Demonstrație. Prin verificare directă reiese că 0 și 1 nu sunt soluții.

- Pentru $2 \leq a \leq 7$ avem $\dfrac{3a-2}{7} \leq \dfrac{19}{7} < 3$ și $\dfrac{108}{5a-6} \geq \dfrac{108}{29} > 3$, deci aceste valori ale lui a nu sunt soluții.
- Pentru $a \geq 9$ avem $\dfrac{3a-2}{7} \geq \dfrac{25}{7} > 3$ și $\dfrac{108}{5a-6} \leq \dfrac{108}{39} < 3$, deci aceste valori ale lui a nu sunt soluții.
- Pentru $a = 8$ avem $\dfrac{3a-2}{7} = \dfrac{22}{7} \in (3,4)$ și $\dfrac{108}{5a-6} = \dfrac{108}{34} \in (3,4)$.

Unica soluție a ecuației este $a = \boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ .... $5p$

□

Problema 5

Câte perechi de numere naturale (x, y) sunt soluții ale ecuației $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3}{y+1} = 4$?

Demonstrație. Avem pe rând $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{3}{y+1} + 4$ echivalent cu $x + 1 = 8 + \dfrac{6}{y+1}$ sau $x = 7 + \dfrac{6}{y+1}$. Deoarece $x \in \mathbb{N}$ rezultă $y + 1 \in \mathcal{D}_6$, adică $y \in \{0, 1, 2, 5\}$. În final, avem soluțiile $(x, y) \in \{(13; 0), (10, 1), (9, 2), (8, 5)\}$. Numărul de perechi de numere naturale (x, y) care sunt soluții ale ecuației este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 6

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $\dfrac{3}{\sqrt{a-10\sqrt{a}+26}+\sqrt{b-4\sqrt{b}+8}} \in \mathbb{N}$, determinați valoarea sumei $a+b$.

Demonstrație. Avem:

$$\frac{3}{\sqrt{a-10\sqrt{a}+26}+\sqrt{b-4\sqrt{b}+8}} = \frac{3}{\sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1}+\sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4}} \in \mathbb{N},$$

unde

$$\begin{cases} \sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1} \geq 1 \\ \sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4} \geq 2 \end{cases} \implies \sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1}+\sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4} \geq 3$$

Din:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1}+\sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4}} \in \mathbb{N} \\ \\ \sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1}+\sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4} \geq 3 \end{cases} \implies \sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1}+\sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4} = 3.$$

Obțiem:

$$\begin{cases} \sqrt{(\sqrt{a}-5)^2+1} = 1 \implies (\sqrt{a}-5)^2+1 = 1 \implies \sqrt{a} = 5 \implies a = 25 \\ \\ \sqrt{(\sqrt{b}-2)^2+4} = 2 \implies (\sqrt{b}-2)^2+4 = 4 \implies \sqrt{b} = 2 \implies b = 4 \end{cases} \implies a+b = \boxed{29}.$$

Răspuns corect: $\boxed{29}$ .... $5p$

□

Problema 7

Determinați valoarea numărului natural n care este soluție a ecuației

$$\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}} = \frac{5+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}.$$

Demonstrație. Rescriem mai întâi expresia $2n+\sqrt{4n^2-1}$ astfel:

$$2n+\sqrt{4n^2-1} = \frac{4n+2\sqrt{(2n+1)(2n-1)}}{2} =$$

$$= \frac{2n+1+2\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+2n-1}{2} = \frac{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)^2}{2}.$$

Obținem astfel,

$$\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)^2}{2}} = \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}.$$

Ecuația devine

$$\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}} = \frac{5+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{5+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff \sqrt{2n+1} = 5 \iff 2n+1 = 25 \iff n = \boxed{12}.$$

Răspuns corect: $\boxed{12}$ .... $5p$

□

Problema 8

Știind că $x,\ y > 0$ și $x^2y^2 + 2x^3y = 1$, aflați valoarea minimă a sumei $(x+y)^2$.

Demonstrație. $x^2y^2 + 2x^3y = 1 \iff x^2(y^2 + 2xy) = 1 \iff y^2 + 2xy = \dfrac{1}{x^2}$

Obținem $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \dfrac{1}{x^2} + x^2 \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x^2} \cdot x^2} = 2 \iff (x+y)^2 \geq 2$.

Cazul de egalitate se realizează pentru $x = 1$ și înlocuind în prima ecuație avem $y^2+2y = 1 \iff \iff y^2 + 2y + 1 = 2 \iff (y+1)^2 = 2 \iff y \in \sqrt{2} - 1,\ -\sqrt{2} - 1\}$. Cum y este pozitiv rămâne ca soluție unică $y = \sqrt{2} - 1$. Valoarea minimă a sumei $(x+y)^2$ este $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

□

Problema 9

Pentru câte valori ale numărului $n \in \mathbb{Z}$ numărul $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ este prim?

Demonstrație.

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^3(n+1) + n^2(n+1) + (n+1)^2 = (n+1)(n^3 + n^2 + n + 1)$$

$$A = (n+1)\left[n^2(n+1) + (n+1)\right] \implies A = (n+1)^2(n^2+1)$$

A este număr prim, deci unul dintre facori este egal cu 1.

- $(n+1)^2 = 1 \implies \begin{cases} n_1 = 0 \\ n_2 = -2 \end{cases}$
- $n^2 + 1 = 1 \implies n = 0$

Pentru $n = 0 \implies A = 1$ și 1 nu este număr prim. Pentru $n = -2 \implies A = 5$, care este număr prim. Numărul de valori ale lui n pentru care A este prim este egal cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 10

Dacă $p,\ q \in \mathbb{Q},\quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\begin{cases} p = r^2 - 2r - 3 \\ q = r^3 - 5r - 6 \end{cases}$, determinați valoarea absolută a sumei $p + q$.

Demonstrație. $p = r^2 - 2r - 3 \implies pr = r^3 - 2r^2 - 3r$

Prin scăderea ecuațiilor $\begin{cases} pr = r^3 - 2r^2 - 3r \\ q = r^3 - 5r - 6 \end{cases} \implies pr - q = -2r^2 + 2r + 6$

Înmulțim prima ecuație din ipoteză cu 2 și obținem un nou sistem în care adunăm cele două ecuații

$\begin{cases} pr - q = -2r^2 + 2r + 6 \\ 2p = 2r^2 - 4r - 6 \end{cases} \iff pr - q + 2p = -2r \iff pr + 2r = q - 2p \iff r(p+2) = q - 2p$.

Cum $q - 2p \in \mathbb{Q} \implies r(p+2) \in \mathbb{Q}$. Dar $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și $p + 2 \in \mathbb{Q} \implies p + 2 = 0 \iff p = -2$ și $q = -4$.

Este necesar să demonstrăm că problema are sens, adică, pentru cele două valori găsite pentru

p și q există numărul irațional r care este soluție a sistemului format din cele două ecuații. Ecuația $r^2 - 2r - 3 = -2$ are soluțiile $r \in \{1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\}$, iar acestea sunt soluții și pentru a doua ecuație. Valoarea absolută a sumei $p+q$ este egală cu $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 11

Dacă tripletul de numere naturale nenule (x, y, z) este soluția ecuației

$$(x+2y)^2 + 2x + 5y + 9 = (y+z)^2,$$

care este valoarea sumei $x+y+z$?

Demonstrație. Încadrăm suma $(x+2y)^2 + 2x + 5y + 9$ între două pătrate perfecte.

$$(x+2y+1)^2 < (x+2y)^2 + 2x + 5y + 9 < (x+2y+3)^2 \implies$$

$$(x+2y)^2 + 2x + 5y + 9 = (x+2y+2)^2 \implies 2x + 3y = 5 \implies x = 1 \text{ și } y = 1.$$

Ecuația devine $9 + 2 + 5 + 9 = (1+z)^2 \implies 25 = (1+z)^2 \implies z = 4$ și valoarea sumei $x+y+z$ este egală cu $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 12

Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\dfrac{\sqrt{d+2\cdot\overline{abc}}}{\overline{d0}} = \dfrac{\sqrt{3\cdot\overline{abc}}}{\overline{abc}}$.

Demonstrație. $\dfrac{\sqrt{d+2\cdot\overline{abc}}}{\overline{d0}} = \dfrac{\sqrt{3\cdot\overline{abc}}}{\overline{abc}} \iff \overline{abc}\cdot\sqrt{d+2\cdot\overline{abc}} = \overline{d0}\cdot\sqrt{3\cdot\overline{abc}} \iff \overline{abc}^2\cdot\left(d+2\overline{abc}\right) = \overline{do}^2\cdot 3\cdot\overline{abc} \iff \overline{abc}\cdot\left(d+2\overline{abc}\right) = 3\overline{do}^2$. Vom nota $\overline{abc} = x$ și ecuația devine $2x^2 + dx = 300d^2$. Înmulțim cu 8 pentru a forma un pătrat în membrul stâng și obținem ecuația $16x^2 + 8xd = 2400d^2$. Adunăm un d^2 în ambii membri ai egalității și avem $(4x+d)^2 = (49d)^2 \iff 4x = 48d \iff x = 12d \iff \overline{abc} = 12d$ cu soluția unică $d = 9$ și $\overline{abc} = 108$. Numărul $\overline{abcd}$ care este soluție a acestei ecuații este $\boxed{1089}$.

Răspuns corect: $\boxed{1089}$ .... $5p$

□

Problema 13

Fie numerele reale x, y, z cu proprietatea că sunt adevărate simultan relațiile

$$x^{2025} = y - z$$

$$y^{2025} = z - x$$

$$z^{2025} = x - y.$$

Care este cea mai mare valoare a sumei $x^{2026} + y^{2026} + z^{2026}$?

Demonstrație. Prima ecuație se înmulțește cu x, a doua cu y și a treia cu z, apoi se însumează cele trei relații: $\begin{cases} x^{2025} = y - z \\ y^{2025} = z - x \\ z^{2025} = x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x^{2026} = xy - xz \\ y^{2026} = yz - xy \\ z^{2026} = xz - yz \end{cases} \implies x^{2026} + y^{2026} + z^{2026} = 0.$

Suma are o singura valoare, deci maximul este $\boxed{0}$.

Răspuns corect: $\boxed{0}$ .... $5p$

□

Problema 14

Cinci băieți și patru fete vor urca într-un tren pentru a pleca în excursie la munte, respectând următoarele condiții: niciun băiat nu se va urca în tren când sunt deja mai mulți băieți decât fete urcați în tren și nicio fată nu se va urca în tren atunci când sunt deja mai multe fete decât băieți urcate în tren. În câte moduri distincte pot urca copiii în tren?

Notă: Este importantă ordinea în care urcă băieții, respectiv fetele în tren. Sunt considerate distincte ordonările în care un anume băiat urcă primul sau al doilea.

Demonstrație. Să observăm mai întâi că cei 9 copii vor urca în tren în perechi fată-băiat sau băiat-fată, alternativ. Primul care urcă poate fi băiat sau fată pentru că în tren nu sunt nici mai mulți băieți decât fete, nici mai multe fete decât băieți. Dacă primul care urcă este băiat, atunci urmează o fată pentru că în tren există deja un băiat, nu este nicio fată, adică suntem în situația în care numărul băieților este mai mare decât numărul fetelor. După ce urcă o fată, se egalează numărul de băieți și fete și revenim la situația anterioară, adică din următoarea pereche de băiat cu fată poate urca oricare dintre cei doi copii mai întâi. Această succesiune se repetă în 4 etape, iar ultimul care urcă este un băiat.
În etapa i va urca perechea (B, F) sau (F, B). Cum sunt 4 etape, înseamnă că sunt $2^4 = 16$ moduri de alternare a perechilor. Perechile se pot forma în $5! \cdot 4!$ moduri pentru că: în prima pereche băiatul poate fi ales în 5 moduri și fata în 4, pentru a doua pereche au rămas 4 băieți din care se poate alege și 3 fete, etc. Numărul de posibilități distincte pentru a urca copiii în tren respectând regulile din cerința problemei este $\boxed{46080}$.

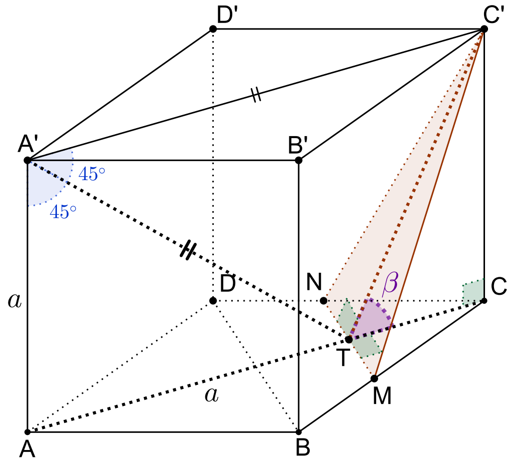
Răspuns corect: $\boxed{46080}$ .... $5p$

□

Problema 15

Se consideră pătratul $ABCD$ de latură a și punctul T situat pe diagonala AC astfel încât $AT = a$. În punctul C se construiește perpendiculara CC' pe planul pătratului astfel încât $CC' = a$. Notăm cu β măsura unghiului planului (ABC) cu planul ce conține dreapta $C'T$ și este paralel cu diagonala BD. Să se afle valoarea pentru $2 \cdot \beta$.

Demonstrație. Notăm cu α planul ce conține dreapta $C'T$ și este paralel eu diagonala BD. Intersecția dintre α și BC o notăm cu M, iar intersecția dintre α și CD o notăm cu N. Astfel, $\alpha = (C'MN)$.



Observăm că:

$$\left.\begin{array}{l} BD \parallel \alpha, \\ BD \subset (ABC) \\ (ABC) \cap \alpha = MN \end{array}\right\} \implies BD \parallel MN. \text{ Cum } CT \perp BD \implies CT \perp MN.$$

Din teorema celor trei perpendiculare obținem:

$$\left.\begin{array}{l} CC' \perp (ABC) \\ CT \perp MN \\ CT,\ MN \subset (ABC) \\ T \in MN \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\implies} C'T \perp MN \implies \angle(\alpha, (ABC)) = \angle C'TC.$$

Vom afla măsura acestui unghi ca diferența dintre $180°$, $\angle C'TA'$ și $\angle A'TA$.
Construim cubul $ABCDA'B'C'D'$. În triunghiul dreptunghic isoscel $\triangle A'AT$ obținem $A'T = = a\sqrt{2}$ și $\angle A'TA = 45°$. Deoarece $A'C' = a\sqrt{2}$ rezultă că triunghiul $\triangle A'C'T$ este isoscel de bază $C'T$ cu $\angle C'A'T = 45°$, iar de aici $\angle A'TC' = 67,5°$. Rămâne că $\beta = \angle C'TC = 67,5°$ și $2 \cdot \beta = \boxed{135°}$.

Răspuns corect: $\boxed{135}$ .... $5p$

□

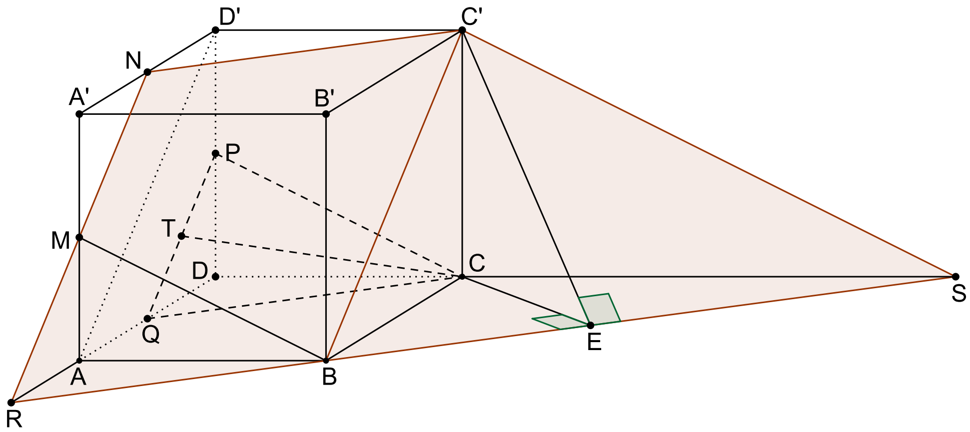
Problema 16

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură $l = 6$ cm, considerăm punctele M, N, P și Q, mijloacele segmentelor (AA'), $(A'D')$, (DD'), respectiv (AD). Știind că punctul T este mijlocul segmentului (PQ) determinați distanța dintre dreapta CT și planul (MNB).

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi că dreapta CT este paralelă cu planul (MNB). Un al patrulea punct al planului (MNB) este C' pentru că $BC' \parallel AD' \parallel MN$, deci BC' și MN sunt coplanare.

$$\left.\begin{array}{l} CP \parallel BM \\ CQ \parallel C'N \\ CP \cap CQ = \{C\} \\ C'N \cap BM \neq \emptyset \end{array}\right\} \implies (CPQ) \parallel (BMN).$$

Cum $CT \subset (CPQ) \implies CT \parallel (BMN)$. Distanța dintre dreaptă și plan este distanța de la oricare punct al dreptei la plan. Vom extinde planul (BMN).



Fie $MN \cap AD = \{R\} \implies R,\, B \in (BMN) \implies BR \subset (BMN)$. Unim R cu B și prelungim până se intersectează cu CD în $S \implies S \in BR \subset (BMN)$, deci planele (BMN) și (BSC') coincid. Pentru a afla distanța de la dreapta CT la planul (MNB) vom determina distanța de la C la planul (BSC'), adică înălțimea în tetraedrul tridreptunghic $CBSC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AM = A'M \\ \angle AMR \equiv \angle A'MN \\ \angle MAR \equiv \angle MA'N \end{array}\right\} \implies \triangle MAR \equiv \triangle MA'N \implies AR = NA' = \frac{l}{2}.$$

$$AB \parallel DS \implies \triangle RAB \sim \triangle RDS \implies \frac{AB}{DS} = \frac{RA}{RD} = \frac{1}{3} \iff \frac{AB}{DS} = \frac{1}{3} \iff CS = 2l.$$

Pentru a determina $d(C,(BSC')$ pe care o notăm cu h, vom exprima volumul tetraedrului $CBSC'$ în două moduri. Pentru asta avem nevoie de înălțimea din C' pe BS.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } CE \perp BS \\ CC' \perp (BCS) \\ CE,\ BS \subset (BCS) \\ E \in BS \end{array}\right\} \overset{T3\perp}{\implies} C'E \perp BS$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle BCS \implies BS = l\sqrt{5}$, apoi calculăm înălțimea în triunghiul dreptunghic $\triangle BCS \implies CE = \dfrac{BC \cdot CS}{BS} = \dfrac{2l\sqrt{5}}{5}$ și din teorema lui Pitagora în $\triangle CC'E \implies C'E = \dfrac{3l\sqrt{5}}{5}$.

În final, $\mathcal{V}_{CBSC'} = \dfrac{\mathcal{A}_{BCS} \cdot CC'}{3} = \dfrac{\mathcal{A}_{BSC'} \cdot h}{3} \iff \dfrac{l \cdot 2l}{2} \cdot l = \dfrac{\frac{3l\sqrt{5}}{5} \cdot l\sqrt{5}}{2} \cdot h \iff h = \dfrac{2l}{3} = \boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore