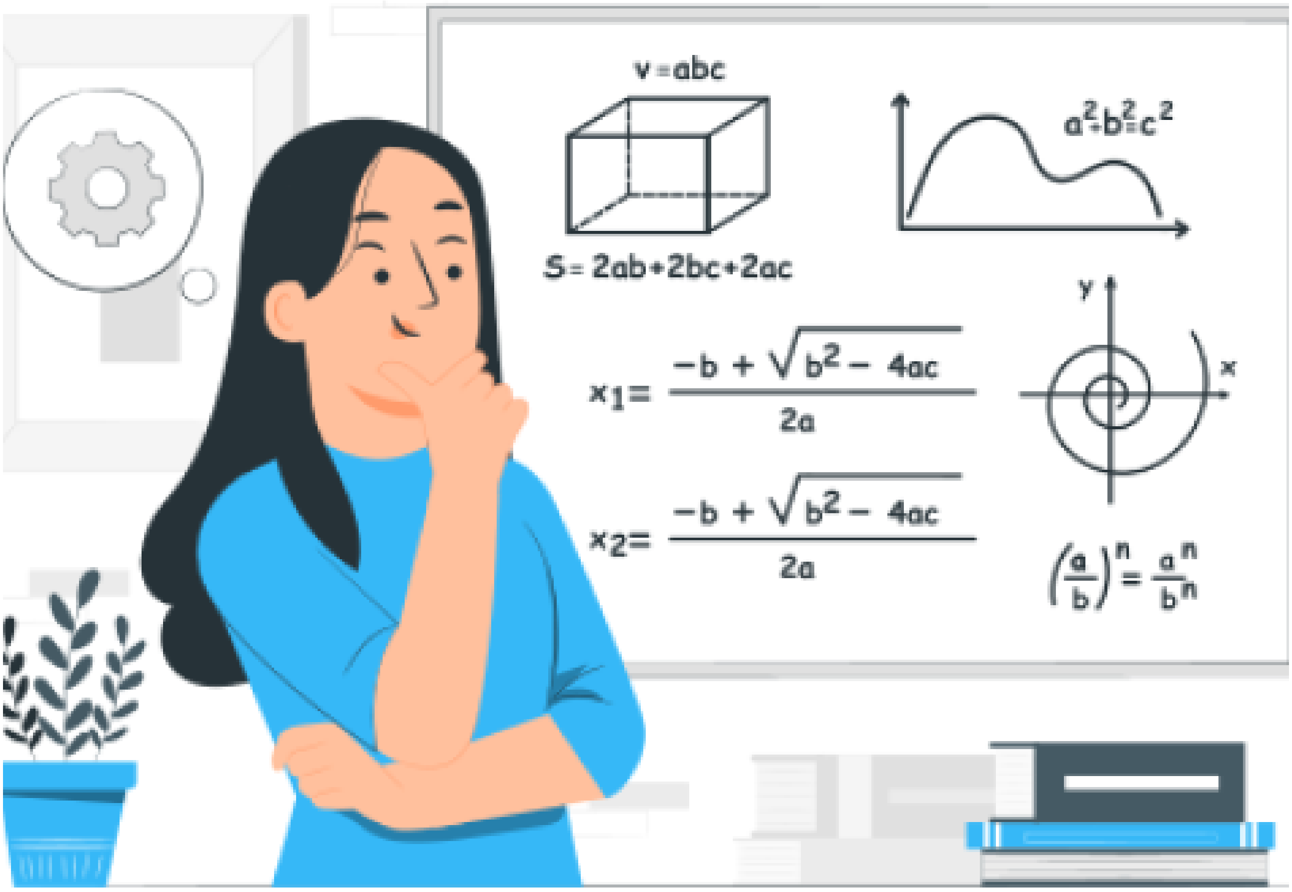

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Subiecte

Problema 1

Avem la dispoziție 150 de cubulețe identice, din care trebuie să construim cel mai mare cub posibil. Câte cubulețe rămân nefolosite?

Problema 2

Fie p un număr prim și x, y numere întregi. Știind că $9xy = p(p + 3x + 6y)$, găsiți valoarea maximă posibilă pentru $p^2 + x^2 + y^2$.

Problema 3

Valoarea minimă a sumei $S = \dfrac{9x^3}{y} + \dfrac{y^3}{x} - \sqrt{xy}$, unde $x > 0,\ y > 0$ este egală cu fracția ireductibilă $\dfrac{a}{b}$, a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Să se afle valoarea expresiei $a^2 + b^2$.

Problema 4

Determinați $a \in \mathbb{N}$ pentru care $\left[\dfrac{3a-2}{7}\right] = \left[\dfrac{108}{5a-6}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Problema 5

Câte perechi de numere naturale (x, y) sunt soluții ale ecuației $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3}{y+1} = 4$?

Problema 6

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $\dfrac{3}{\sqrt{a - 10\sqrt{a} + 26} + \sqrt{b - 4\sqrt{b} + 8}} \in \mathbb{N}$, determinați valoarea sumei $a + b$.

Problema 7

Determinați valoarea numărului natural n care este soluție a ecuației

$$\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{5 + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}.$$

Problema 8

Știind că $x,\ y > 0$ și $x^2y^2 + 2x^3y = 1$, aflați valoarea minimă a sumei $(x + y)^2$.

Problema 9

Pentru câte valori ale numărului $n \in \mathbb{Z}$ numărul $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ este prim?

Problema 10

Dacă $p,\ q \in \mathbb{Q},\quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\begin{cases} p = r^2 - 2r - 3 \\ q = r^3 - 5r - 6 \end{cases}$, determinați valoarea absolută a sumei $p + q$.

Problema 11

Dacă tripletul de numere naturale nenule (x, y, z) este soluția ecuației

$$(x + 2y)^2 + 2x + 5y + 9 = (y + z)^2,$$

care este valoarea sumei $x + y + z$?

Problema 12

Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\dfrac{\sqrt{d + 2 \cdot \overline{abc}}}{\overline{d0}} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot \overline{abc}}}{\overline{abc}}$.

Problema 13

Fie numerele reale x, y, z cu proprietatea că sunt adevărate simultan relațiile

$$x^{2025} = y - z$$

$$y^{2025} = z - x$$

$$z^{2025} = x - y.$$

Care este cea mai mare valoare a sumei $x^{2026} + y^{2026} + z^{2026}$?

Problema 14

Cinci băieți și patru fete vor urca într-un tren pentru a pleca în excursie la munte, respectând următoarele condiții: niciun băiat nu se va urca în tren când sunt deja mai mulți băieți decât fete urcați în tren și nicio fată nu se va urca în tren atunci când sunt deja mai multe fete decât băieți urcate în tren. În câte moduri distincte pot urca copiii în tren?

Notă: Este importantă ordinea în care urcă băieții, respectiv fetele în tren. Sunt considerate distincte ordonările în care un anume băiat urcă primul sau al doilea.

Problema 15

Se consideră pătratul $ABCD$ de latură a și punctul T situat pe diagonala AC astfel încât $AT = a$. În punctul C se construiește perpendiculara CC' pe planul pătratului astfel încât $CC' = a$. Notăm cu β măsura unghiului planului (ABC) cu planul ce conține dreapta $C'T$ și este paralel cu diagonala BD. Să se afle valoarea pentru $2 \cdot \beta$.

Problema 16

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură $l = 6$ cm, considerăm punctele M, N, P și Q, mijloacele segmentelor (AA'), $(A'D')$, (DD'), respectiv (AD). Știind că punctul T este mijlocul segmentului (PQ) determinați distanța dintre dreapta CT și planul (MNB).

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore