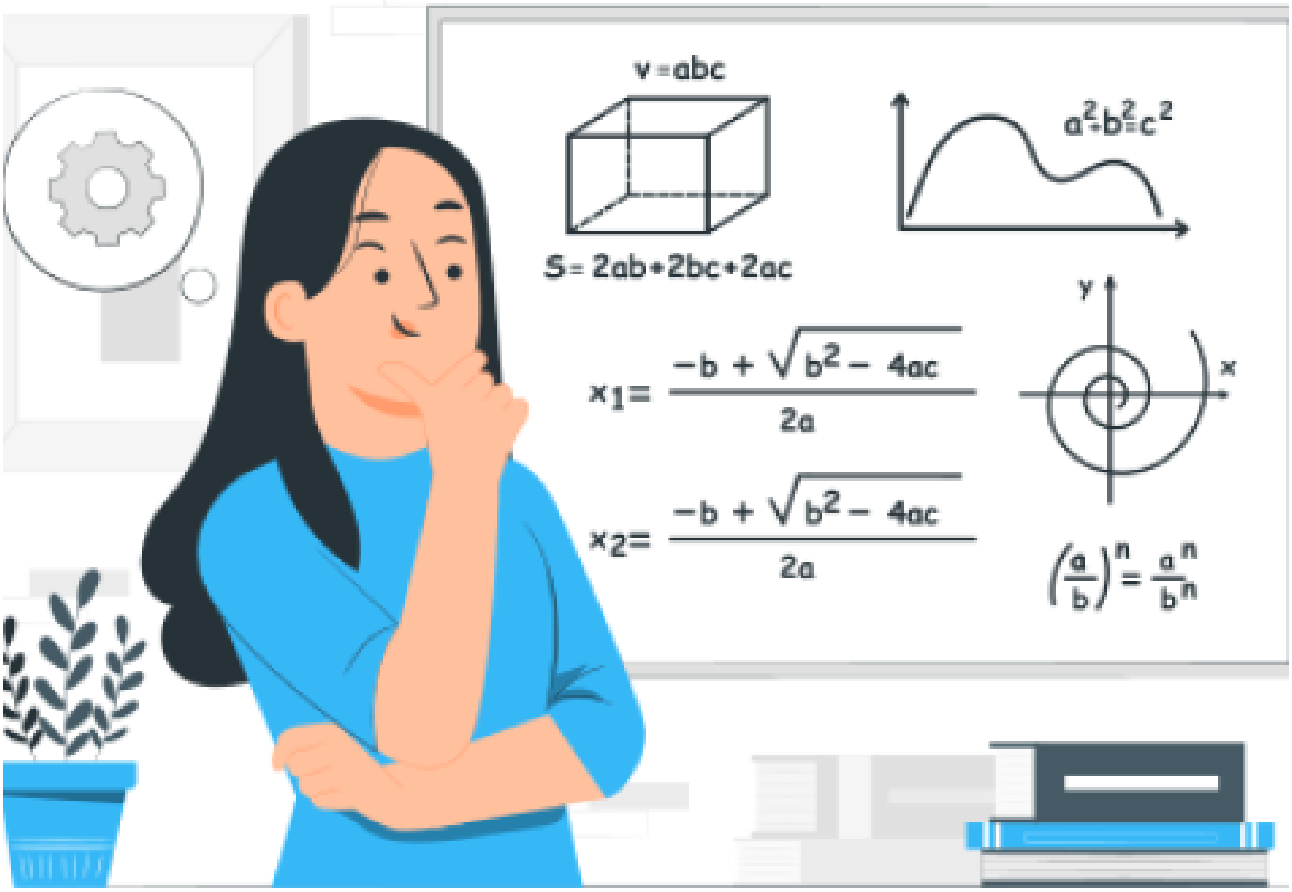


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Aflați numărul natural scris în baza 10, știind că printre cifrele sale exact una este egală cu 5, iar prin ștergerea ei se obține un număr mai mic cu 275.

Marius Mîinea, Găiești

Demonstraţie. Vom nota numărul inițial cu $N = \overline{a_1a_2\ldots a_k5b_1b_2\ldots b_p}$. După eliminarea cifrei 5 obținem relația

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k5b_1b_2\ldots b_p} = \overline{a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_p} + 275 \quad (1)$$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^{p+1} + 5\cdot 10^p + \overline{b_1b_2\ldots b_p} = \overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^p + \overline{b_1b_2\ldots b_p} + 275 \quad (2)$$

Vom scădea numărul $\overline{b_1b_2\ldots b_p}$ din ambii membri ai egalității și obținem

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^{p+1} + 5\cdot 10^p = \overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^p + 275$$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^{p+1} + 5\cdot 10^p - \overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot 10^p = 275$$

$$5\cdot 10^p + 10^p\cdot(10\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_k} - \overline{a_1a_2\ldots a_k}) = 275$$

$$5\cdot 10^p + 10^p\cdot 9\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_k} = 275 \quad (3)$$

Observăm că $p = 0$, altfel în membrul stâng ultima cifră este 0, iar în membrul drept ultima cifră este 5, iar relația devine

$$9\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_k} = 270$$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = 30.$$

Numărul căutat este $\boxed{305}$.

Barem:

- Scrie corect ecuația (1) . . . 1p
- Descompune numerele și scrie ecuația (2) . . . 1p
- Obține ecuația (3) . . . 3p
- Observă că $p = 0$ . . . 1p
- Obține soluția . . . 1p

□

Problema 2

Determinați numărul tuturor numerelor naturale nenule a pentru care există cel puțin un număr natural nenul b, cu $b > a$, astfel încât suma resturilor obținute prin împărțirea lui 2025 la a, respectiv la b să fie egală cu 2025.

Demonstrație. Conform teoremei împărțirii cu rest avem

$$2025 = a \cdot q_1 + r_1 \quad \text{și} \quad 2025 = b \cdot q_2 + r_2,$$

unde $0 \leq r_1 < a$ și $0 \leq r_2 < b$. Aceste două relații sunt echivalente cu

$$2025 - r_1 = a \cdot q_1 \quad \text{și} \quad 2025 - r_2 = b \cdot q_2,$$

de unde observăm că

$$a \mid 2025 - r_1 \text{ și } b \mid 2025 - r_2.$$

Știm că suma resturilor este 2025, adică $r_2 = 2025 - r_1$ și înlocuim în a doua relație de mai sus. Obținem astfel $b \mid 2025 - (2025 - r_1) \iff b \mid r_1$. Cum b este divizor al lui r_1, înseamnă că, fie $r_1 = 0$, fie $b \leq r_1$. A doua situație nu este posibilă pentru că $a < b$ din datele problemei, pe de altă parte $r_1 < a$, conform teoremei împărțirii cu rest și obținem $b \leq r_1 < a < b$, situație care nu este posibilă. Prin urmare, $r_1 = 0$ și acesta este divizibil cu b pentru că 0 se divide cu toate numerele naturale. Atunci $2025 = a \cdot q_1$ și a este un divizor natural al lui 2025. Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \implies$ numărul divizorilor este $(4+1) \cdot (2+1) = 15$.
Mai putem observa în continuare că $r_2 = 2025$ și de aici $q_2 = 0$, adică $b > 2025$. Pentru fiecare valoare a lui a, numărul b poate lua orice valoare strict mai mare decât 2025.

Soluție alternativă: Conform teoremei împărțirii cu rest avem

$$2025 = a \cdot q_1 + r_1 \quad \text{și} \quad 2025 = b \cdot q_2 + r_2,$$

unde $0 \leq r_1 < a$ și $0 \leq r_2 < b$. Adunând aceste ultime două inegalități obținem $a + b > r_1 + r_2$. Cum $r_1 + r_2 = 2025$ obținem $a + b > 2025$. Observăm că:

$$2025 = a \cdot q_1 + b \cdot q_2$$

Dacă $q_2 \neq 0$, atunci din condiția $b > a$ rezultă că și $q_1 \neq 0$. Deoarece q_1 și q_2 sunt nenule obținem $a + b \leq a \cdot q_1 + b \cdot q_2 = 2025$. Această situație duce la o contradicție. Prin urmare, $q_2 = 0$. Atunci $2025 = a \cdot q_1$ și din ecuația $2025 = a \cdot q_1 + r_1$ obținem $r_1 = 0$. Așadar, a este un divizor natural al lui 2025. Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \implies$ numărul divizorilor este $(4+1) \cdot (2+1) = 15$. Pentru fiecare valoare a lui a, numărul b poate lua orice valoare strict mai mare decât 2025.

Barem:

- Scrie corect teorema împărțirii cu rest 1p
- Demonstrează că $b \mid r_1$ ... 2p
- Elimină cazul $b \leq r_1$ și obține $r_1 = 0$ ... 2p
- Află numărul de valori ale lui a 1p
- Justifică existența numărului b ... 1p

□

Problema 3

a) Care este cel mai mic număr natural care are toate cifrele egale cu 1 și este divizibil cu 7?

b) Ana și Bogdan scriu numere pe tablă. Prima este Ana și scrie numărul 1, apoi scrie și Bogdan tot numărul 1. Pe rând, cei doi copii scriu pe tablă numărul obținut prin alipirea ultimelor două numere scrise pe tablă. Primele 4 numere scrise pe tablă sunt 1, 1, 11, 111.
Cine va scrie pe tablă primul număr divizibil cu 63?

Demonstrație.

a) Cel mai mic dintre numerele care au toate cifrele egale cu 1 și sunt divizibile cu 7 este cel care are cel mai puține cifre. Verificăm numerele pe rând:

- $1 = 7 \cdot 0 + 1 \implies 1$ nu este divizibil cu 7;
- $11 = 7 \cdot 1 + 4 \implies 11$ nu este divizibil cu 7;
- $111 = 7 \cdot 15 + 6 \implies 111$ nu este divizibil cu 7;
- $1111 = 7 \cdot 158 + 5 \implies 1111$ nu este divizibil cu 7;
- $11111 = 7 \cdot 1587 + 2 \implies 11111$ nu este divizibil cu 7;
- $111111 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, deci $111111 \,\vdots\, 7$ și acesta este cel mai mic.

b) Primele numere scrise pe tablă sunt

$$1,\ 1,\ 11,\ 111,\ 11111,\ 11111111,\ \ldots\ (1)$$

Numerele din șir sunt scrise doar cu cifra 1, iar numărul de cifre al fiecărui termen începând cu al treilea este egal cu suma numerelor cifrelor celor doi termeni precedenți, adică

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots\ (2)$$

Numerele care se divid cu 63 se divid cu 7 și cu 9.

- $\overline{11\ldots1} \,\vdots\, 9$ dacă și numai dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9, adică numărul de cifre este divizibil cu 9;
- Vom demonstra că un număr de n cifre este divizibil cu 7 dacă și numai dacă numărul de cifre este divizibil cu 6. Fie $n = 6 \cdot k + r$, unde $0 \leq r < 6$.
  Atunci $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}} = 111111 \cdot 10^{n-6} + 111111 \cdot 10^{n-12} + \ldots + 111111 \cdot 10^{n-6k} + \underbrace{11\ldots1}_{r \text{ cifre}}$.
  Fiecare număr care este scris cu 6 cifre de 1 este divizibil cu 6, deci $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ cifre}} \,\vdots\, 7 \iff$
  $\iff \underbrace{11\ldots1}_{r \text{ cifre}} \,\vdots\, 7$. Din cele demonstrate la punctul a) obținem $r = 0$.

În concluzie, numerele de n cifre egale toate cu 1 se divid simultan și cu 7 și cu 9 dacă și numai dacă n este divizibil simultan și 9 și cu 6. Astfel, trebuie să căutăm primul termen din șirul (2) care respectă aceste cerințe. Nu este greu de aflat, acesta este al 12−lea termen, adică 144. Cum Bogdan este cel care scrie numerele de pe pozițiile pare din șir, înseamnă că el va scrie primul număr care se divide cu 63.

Barem:

- a) Justifică de ce 111111 este soluția 1p
- b) Identifică regula de calcul pentru numărul de cifre al fiecărui număr 1p
- Observă că numărul de cifre este divizibil cu 9 . . . . 1p
- Demonstrează că numărul de cifre este divizibil cu 6 . . . . 3p
- Determină locul primului termen din șir divizibil cu 63 . . . . 1p

□

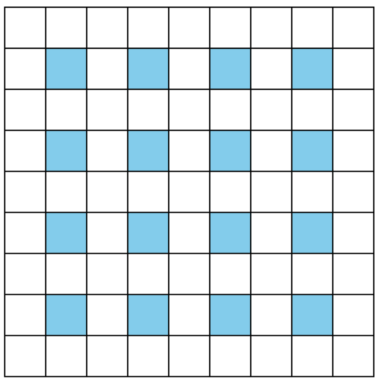
Problema 4

Ana și Bogdan joacă un joc. Pe o tablă 9×9 formată din 81 de pătrățele albe cei doi copii colorează alternativ pătrățelele tablei după următoarea regulă:

- Prima care colorează este Ana și ea colorează în verde un pătrat 2×2 format din 4 pătrățele albe;
- Bogdan colorează în galben un pătrățel alb (adică unul care nu a fost deja colorat de Ana).
- În momentul în care Ana nu mai poate colora, Bogdan va colora în galben restul pătrățelelor rămase din tabla 9×9;
- Jocul ia sfârșit în momentul în care toate pătrățelele tablei mari sunt colorate în verde sau galben.

Care este cel mai mare număr de pătrățele pe care ar putea să le coloreze în galben Bogdan până la sfârșitul jocului și care este strategia pe care trebuie să o aplice acesta?

Demonstrație. Vom numi *celulă pivot* un pătrat dintre cele colorate în albastru în desenul de mai jos, adică cele care se găsesc la intersecția dintre o linie cu număr par și o coloană cu număr par.



Observăm că, oricum ar selecta Ana un pătrat 2×2, acesta va conține și o *celulă pivot*, adică, pentru a putea colora un pătrat 2×2 ea are nevoie ca cel puțin o *celulă pivot* să fie necolorată de Bogdan în galben. Prin urmare, pentru a putea colora cât mai multe pătrățele ale tablei mari în galben, Bogdan va colora, de fiecare dată când îi vine rândul, o *celulă pivot* în galben, reducând astfel din posibilitățile Anei. Sunt 16 *celule pivot*, prima care colorează este Ana, deci ea va colora 8 pătrate 2×2, adică $8 \cdot 4 = 32$ pătrățele din cele $9 \cdot 9 = 81$ pe care le are tabla mare. Cel mai mare număr de pătrățele pe care le poate colora Bogdan este $81 - 32 = 49$.

Barem:

- Observă că pătratele colorate în verde conțin câte o celulă pivot . . . . $2p$
- Stabilește strategia pe care trebuie să o aplice Bogdan . . . . $3p$
- Obține că numărul maxim de pătrățele este 49 . . . . $2p$

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$

Timp de lucru: . . . . 3 ore