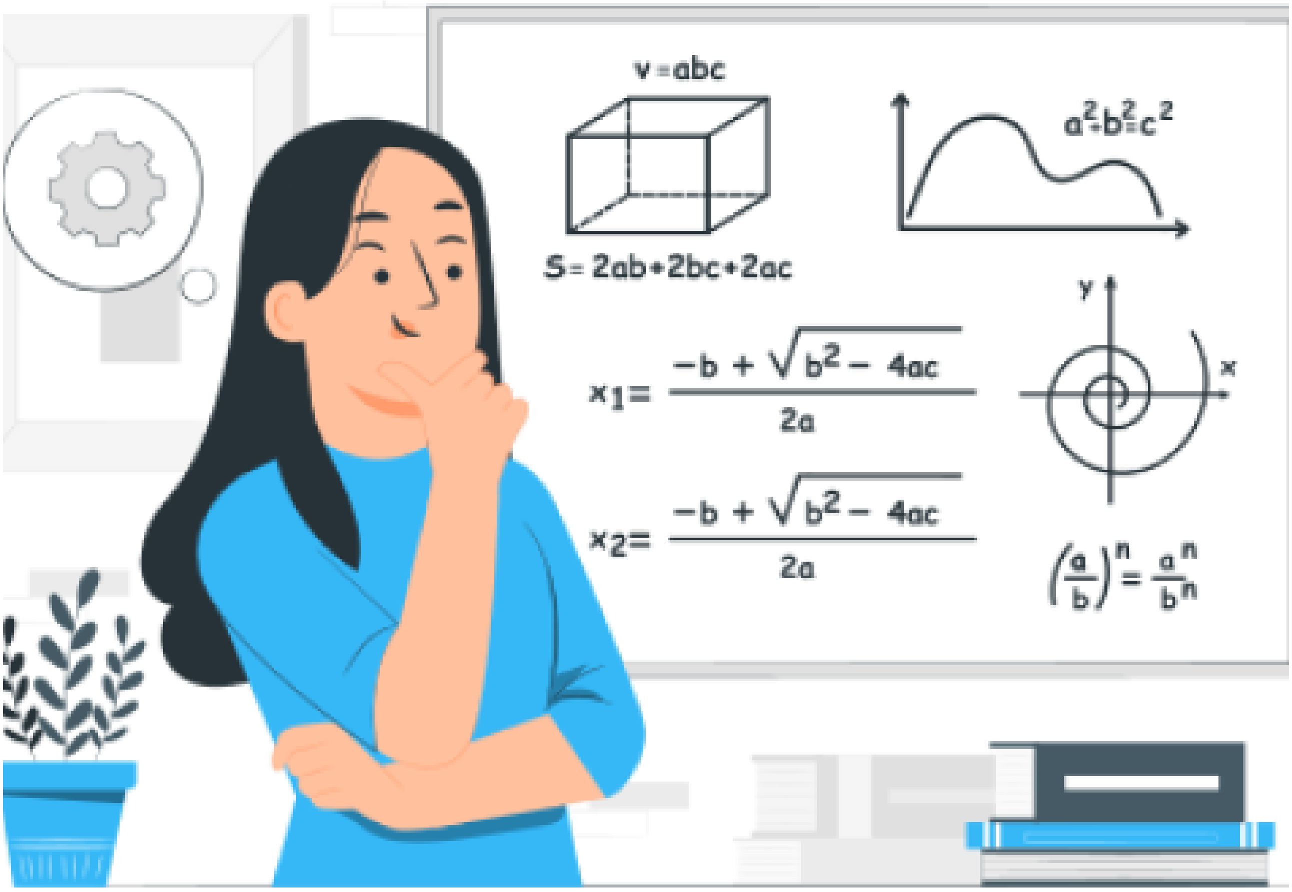


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Aflați numerele raționale nenule a, b, c și d care verifică relațiile:

$$a = 1 + \frac{bc}{d}, \quad b = 2 + \frac{cd}{a}, \quad c = 3 + \frac{da}{b}, \quad d = 4 + \frac{ab}{c}.$$

Adrian Bud, Negrești Oaș

Demonstrație. Relațiile sunt echivalente cu:

$$ad = d + bc \quad (1)$$

$$ab = 2a + cd \quad (2)$$

$$bc = 3b + ad \quad (3)$$

$$cd = 4c + ab \quad (4)$$

Din (1) + (3) rezultă $ad + bc = d + bc + 3b + ad$, adică $d + 3b = 0$, de unde $d = -3b$.

Din (2) + (4) rezultă $ab + cd = 2a + cd + 4c + ab$, adică $2a + 4c = 0$, de unde $a = -2c$.

Prin înlocuirea lui a și d în prima relație, aceasta devine $6bc = -3b + bc$ sau $-5bc = 3b$, de unde rezultă $c = -\frac{3}{5}$ și $a = \frac{6}{5}$.

Prin înlocuirea lui a și d în a doua relație, aceasta devine $-2bc = -4c - 3bc$ sau $2b = 4 + 3b$, de unde rezultă $b = -4$ și $d = 12$.

Numerele sunt $a = \frac{6}{5}$, $b = -4$, $c = -\frac{3}{5}$ și $d = 12$.

Barem:

- Obține $d = -3b$ și $a = -2c$ 3p
- Obține valorile pentru una dintre perechile (a, c) sau (b, d) 3p
- Finalizare 1p

□

Problema 2

Fie a, b, c numere naturale mai mari decât 1, astfel încât

$$c + 1 \mid a + b, \quad a + 1 \mid b + c, \quad b + 1 \mid c + a.$$

Să se determine cea mai mare valoare posibilă a sumei $a + b + c$.

Demonstrație. Presupunem că $a \geq b \geq c$. Din $a + 1 \mid b + c$ și inegalitatea $b + c \leq 2a < 2(a + 1)$ rezultă că $b + c = a + 1$. Prin urmare, $a = b + c - 1$.

În continuare știm că $b + 1 \mid a + c \implies b + 1 \mid 2c + b - 1$. Dar $b + 1 \mid b + 1$, deci $b + 1$ divide și diferența lor, adică $b + 1 \mid 2c - 2$. Adică, $2c - 2$ este un multiplu al lui $b + 1$ și $b + 1 \leq 2c - 2 \leq 2b - 2 < 2(b + 1)$, de unde obținem $2c - 2 = b + 1 \iff b = 2c - 3$.

De aici rezultă că $a = 3c - 4$ și $c + 1 \mid 5c - 7$. În plus, $c + 1 \mid 5c + 5$ și divide și diferența lor, deci $c + 1 \mid 12 \iff c + 1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Pe de altă parte, $a + b + c = 6c - 7$ și pentru a fi cea mai mare e necesar ca c să ia cea mai mare valoare, adică 11. Valoarea maximă a sumei $a + b + c$ este 59.

Barem:

- Demonstrează $b + c = a + 1$, unde a este cel mai mare ... 2p
- Demonstrează $b = 2c - 3$ ... 2p
- Demonstrează $c + 1 \mid 12$ ... 2p
- Obține valoarea maximă 59 ... 1p

□

Problema 3

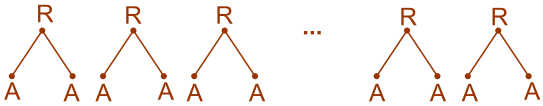
Într-o comunitate fiecare băiat are fie exact un prieten, fie exact doi prieteni. Prietenia este reciprocă, adică dacă A este prieten cu B, atunci și B este prieten cu A. Într-o dimineață, toți băieții cu doi prieteni poartă tricouri roșii, iar ceilalți băieți poartă tricouri albastre. În acest moment oricare doi prieteni poartă tricouri de culori diferite. După-amiază, 10 băieți își schimbă tricourile roșii în tricouri albastre și 12 băieți își schimbă tricourile albastre în tricouri roșii. Acum oricare doi prieteni poartă tricouri de aceeași culoare. Câți băieți sunt în această comunitate?

Observație: Un băiat își poate schimba tricoul o singură dată.

Demonstrație. Pentru început facem următoarele observații:

- Dacă doi prieteni ar purta tricouri de aceeași culoare, ar încălca condiția enunțată. Prin urmare, o legătură de prietenie se face întotdeauna între un băiat cu tricou roșu (doi prieteni) și un băiat cu tricou albastru (un singur prieten).
- Doi băieți cu tricou albastru nu pot fi prieteni între ei, deoarece ar avea aceeași culoare. Astfel, fiecare băiat cu tricou albastru are ca singur prieten un băiat cu tricou roșu.
- Dacă doi băieți cu tricou roșu ar împărți același prieten (un băiat cu tricou albastru), atunci acel băiat ar avea doi prieteni și ar trebui să poarte tricou roșu. Obținem o contradicție deoarece acel băiat nu poate fi avea în același timp și tricou albastru și tricou roșu. Așadar, prietenii fiecărui băiat cu tricou roșu sunt unici.

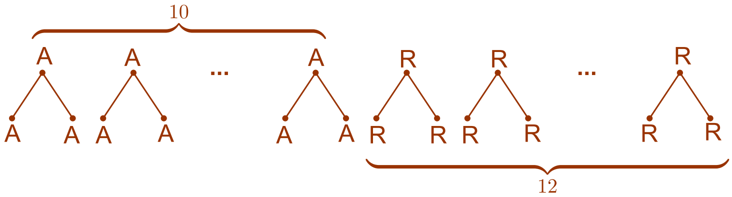
Conform acestor observații, așa cum se vede și în figura de mai jos, putem grupa copiii câte 3: unul cu tricou roșu și cei doi prieteni ai săi care au tricouri albastre.



În fiecare grupă de câte 3 copii, se poate face una din următoarele două schimbări pentru ca oricare doi prieteni să aibă tricouri de aceeași culoare:

- fie cel cu tricou roșu își schimbă tricoul în albastru și atunci toți cei 3 din acea grupă au tricouri albastre
- fie cei doi copii cu tricouri albastre își schimbă tricourile cu tricouri roșii și atunci toți cei 3 din acea grupă au tricouri roșii.

Ca, în final, orice pereche de prieteni să aibă tricouri de aceeași culoare, este necesar ca în fiecare pereche exact unul să își schimbe culoarea tricoului – nu amândoi, pentru că altfel ar avea în continuare culori diferite.



Cei 10 băieți care își schimbă culoarea tricoului din roșu în albastru au 20 de prieteni cu tricouri albastre, deci sunt 10+20=30. Cei 12 copii cu tricouri albastre care își schimbă în roșu au 6 prieteni cu tricouri roșii. Numărul băieților din comunitate este 30+18=48.

Barem:

- Observă că doi prieteni au tricouri de culori diferite 1p
- Observă că băieții cu tricou albastru au un singur prieten 1p
- Argumentează că doi băieți cu tricouri roșii nu au prieteni comuni 1p
- Demonstrează că într-o pereche de prieteni unul singur își schimbă tricoul 2p
- Finalizare 2p

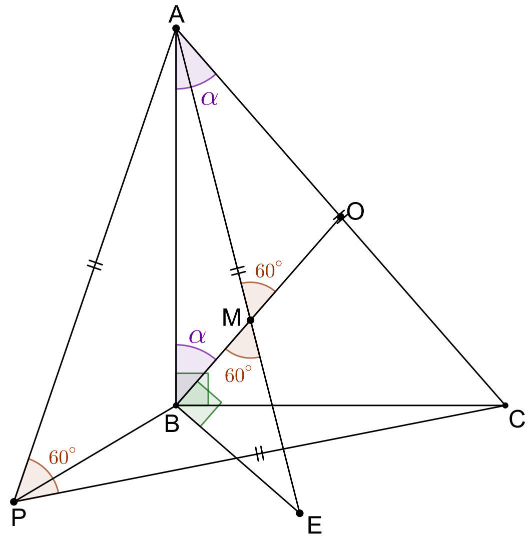
$\square$

Problema 4

Fie $\triangle ABC$ un triunghi dreptunghic de ipotenuză AC. Punctul O este mijlocul ipotenuzei. Se consideră un punct E în exteriorul triunghiului, astfel încât $AE = AC$, $OB \perp BE$, iar A și E sunt de o parte și de alta a dreptei BO. Notăm $AE \cap BO = \{M\}$. Arătați că dacă $m(\angle BME) = 60°$, atunci $AB = BC$.

Adrian Bud, Negrești Oaș

Demonstrație. BO este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic $\triangle BAC \implies BO = \dfrac{AC}{2} = AO \implies \triangle AOB$ este isoscel cu $OA = OB \implies \angle ABO \equiv \angle BAO$. Pe de altă parte, $\angle AMO = \angle ABM + \angle BAM$, ca unghi exterior triunghiului $\triangle ABM$, deci $\angle BAO + \angle BAM = 60°$. Asta ne sugerează să lipim lângă unghiul $\angle BAO$ un unghi de măsură egală cu $\angle BAM$ pentru a obține un unghi cu măsură $60°$. Fie $\triangle ACP$ echilateral, astfel încât punctele B și P sunt de aceeași parte față de dreapta AC.



Notăm $m(\angle BAC) = m(\angle ABO) = \alpha°$. Vom demonstra că semidreapta $(CB$ este în interiorul unghiului $\angle PCA$. Observăm pentru început că $\alpha > 30°$ deoarce $m(\angle ABM) + m(\angle BAM) = 60°$, iar $m(\angle BAM) < m(\angle BAC) = m(\angle ABM) = \alpha°$. Apoi, deoarece $\alpha > 30°$ și $m(\angle ACB) = 90° - \alpha$, obținem $m(\angle ACB) < 60° = m(\angle ACP)$, deci semidreapta $(CB$ este în interiorul unghiului $\angle PCA$.
În continuare vom arăta că $m(\angle PAB) = m(\angle MAB)$. Așadar $m(\angle PAB) = m(\angle PAC) - m(\angle BAC) = 60° - \alpha$. În $\triangle ABM$ avem $m(\angle MAB) + m(\angle MBA) = m(\angle BME) \implies m(\angle MAB) = 60° - \alpha$.
Demonstrăm că $\triangle BAP \equiv \triangle BAE$.

$$\left.\begin{array}{l} AP = AC = AE \\ AB = AB \\ \angle BAP \equiv \angle BAE \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \triangle BAP \equiv \triangle BAE \implies m(\angle ABP) = m(\angle ABE) = 90° + \alpha.$$

În $\triangle ABP$ avem $m(\angle APB) = 180° - [m(\angle BAP) + m(\angle ABP)] = 180° - (60° - \alpha + 90° + \alpha) = 30° \implies m(\angle CPB) = m(\angle CPA) - m(\angle BPA) = 60° - 30° = 30°$.
Demonstrăm că $\triangle PBA \equiv \triangle PBC$.

$$\left.\begin{array}{l} PA \equiv PC \\ \angle APB \equiv \angle CPB \\ PB \equiv PB \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \triangle PBA \equiv \triangle PBC \implies BA \equiv BC.$$

Barem:

- Construiește triunghiul echilateral .... $2p$
- Justifică $(CB \subset Int(\angle ACP)$ .... $1p$
- Demonstrează că $\triangle BAP \equiv \triangle BAE$ .... $2p$
- Demonstrează că $\triangle PBA \equiv \triangle PBC$. .... $2p$

$\square$

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$

Timp de lucru: .... 3 ore