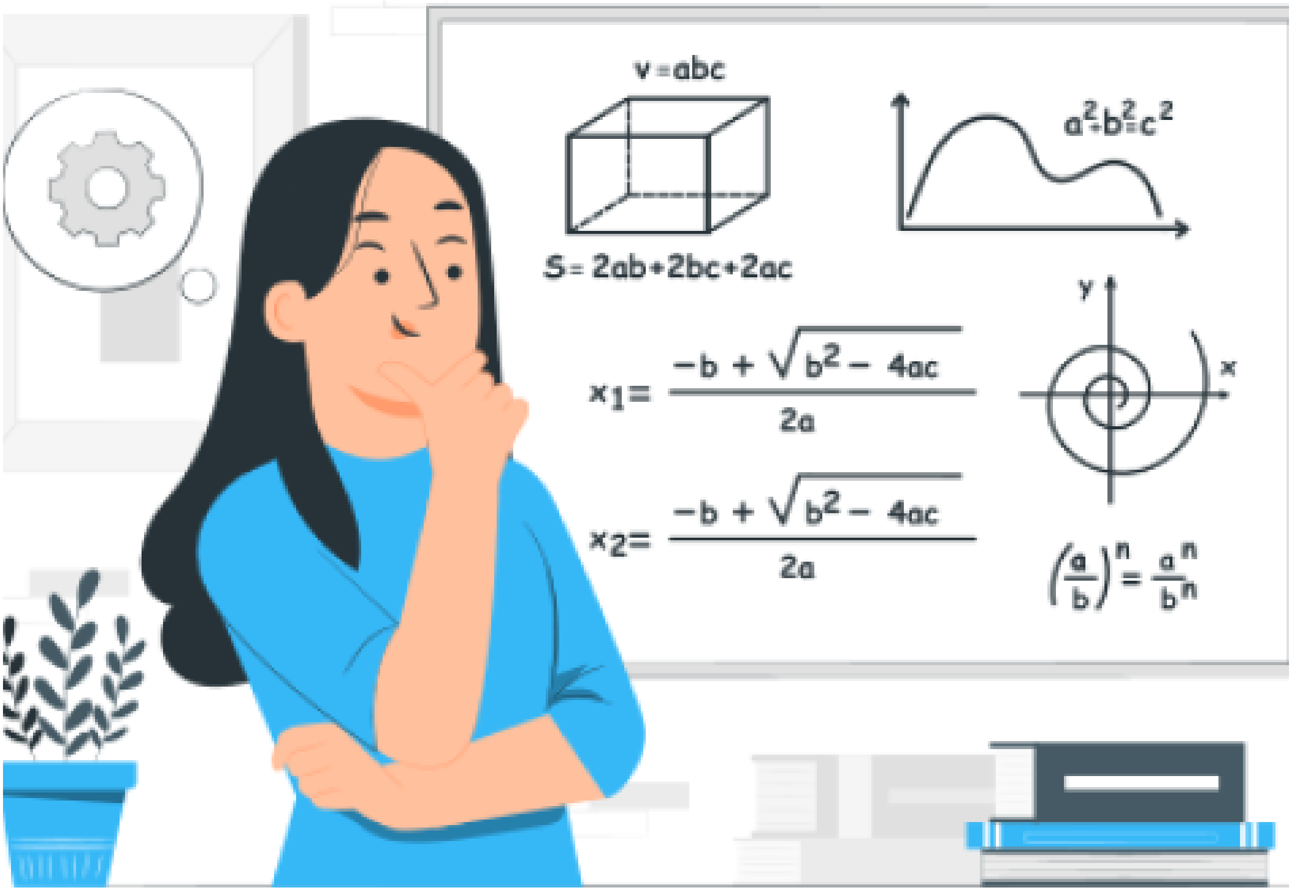


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa III
Clasa a VII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Aflați tripletele de numere naturale nenule (m, n, k) care sunt soluții ale ecuației

$$8^m + n! - 1 = k^2,$$

unde am notat cu $n!$ produsul primelor n numere naturale nenule.

Mihaela Berindeanu, București

Demonstrație. Vom căuta, de fapt, numerele m și n pentru care expresia $8^m + n! - 1$ este pătrat perfect. Știm că, de regulă, trebuie să căutăm soluții printre numerele "mici", iar pentru restul numerelor vom căuta argumente pentru care nu este pătrat perfect. Numărul 8^m ne sugerează să verificăm resturile la împărțirea prin 4, atâta vreme cât $m \neq 0$, adică $8^m \vdots 4$.

- Dacă $n \geq 4 \implies \begin{cases} n! \vdots 4 \\ 8^m \vdots 4 \end{cases} \implies 8^m + n! - 1 = \mathcal{M}_4 + 3$, deci nu este pătrat perfect, prin urmare nu avem soluții.
- Dacă $n < 4 \iff n \in \{1, 2, 3\}$ distingem următoarele situații:

  – Cazul $n = 1 \implies 8^m + 1 - 1 = k^2 \implies 8^m = k^2$, deci în această situație avem o infinitate de soluții $(m, n, k) = (2t, 1, 8^t)$.

  – Cazul $n = 2 \implies 8^m + 2 - 1 = k^2 \implies 8^m + 1 = k^2 \iff 8^m = (k+1)(k-1)$. Deci $k + 1$ și $k - 1$ sunt divizori pentru 8^m.

  $$\begin{cases} k - 1 = 2^a \\ k + 1 = 2^b \\ a < b \end{cases} \implies \begin{cases} k - 1 \mid k + 1 \\ k - 1 \mid k - 1 \end{cases} \implies k - 1 \mid 2 \implies k - 1 \in \{1, 2\} \implies \begin{cases} k = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

  ◦ Pentru $k = 2 \implies 8^m + 1 = 2^2$, fără soluții în $\mathbb{N}$.
  ◦ Pentru $k = 3 \implies 8^m + 1 = 3^2 \implies 8^m = 8 \implies m = 1$, deci soluția este $(m, n, k) = (1, 2, 3)$.

  – Cazul $n = 3 \implies 8^m + 5 = k^2$, fără soluții în $\mathbb{N}$ deoarece $8^m + 5 = \mathcal{M}_8 + 5$, ori pătratele perfecte impare sunt de forma $\mathcal{M}_8 + 1$.

Barem:

- Demonstrează că pentru $n \geq 4$ nu există soluții . . . . $1p$
- Rezolvă cazul $n = 1$ . . . . $2p$
- Rezolvă cazul $n = 2$ . . . . $3p$
- Rezolvă cazul $n = 3$ . . . . $1p$

□

Problema 2

Se consideră numerele naturale nenule $a,\ b,\ c,\ a \neq c$ și $b \neq 5$ și numărul

$$A = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+5} + \frac{5}{a+5}.$$

a) Demonstrați că $1 < A < 3$;

b) Dacă $A \in N$, demonstrați că $a+b+c+5$ este număr compus.

Mihaela Berindeanu, București

Demonstraţie.

a)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a+b} > \dfrac{a}{a+b+c+5} \\ \dfrac{b}{b+c} > \dfrac{b}{a+b+c+5} \\ \dfrac{c}{c+5} > \dfrac{c}{a+b+c+5} \\ \dfrac{5}{a+5} > \dfrac{5}{a+b+c+5} \end{array}\right\} \implies A > \frac{a+b+c+5}{a+b+c+5} = 1.$$

Știm că dacă $a,\ b > 0$ și $a < b$ atunci $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x}$ pentru orice $x > 0$. Afirmația este adevărată pentru că este echivalentă cu $a(b+x) < b(a+x) \iff ab+ax < ab+bx \iff a < b$. Aplicăm acest rezultat pentru fiecare dintre fracțiile care compun suma de la A și obținem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a+b} < \dfrac{a+c+5}{a+b+c+5} \\ \dfrac{b}{b+c} < \dfrac{b+a+5}{a+b+c+5} \\ \dfrac{c}{c+5} < \dfrac{c+a+b}{a+b+c+5} \\ \dfrac{5}{a+5} < \dfrac{5+b+c}{a+b+c+5} \end{array}\right\} \implies A < \frac{3(a+b+c+5)}{a+b+c+5} \implies A < 3.$$

b) Am demonstrat că $1 < A < 3$ și cum $A \in \mathbb{N} \implies A = 2$. Vom demonstra că $ac = 5b$.

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+5} + \frac{5}{a+5} = 2 \iff$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} - \frac{c}{b+c} + \frac{c+5}{c+5} - \frac{5}{c+5} + \frac{5}{a+5} = 2 \iff$$

$$\frac{a}{a+b} - \frac{c}{b+c} + \frac{5}{a+5} - \frac{5}{c+5} = 0$$

$$\frac{ab-bc}{(a+b)(b+c)} + \frac{5c-5a}{(a+5)(c+5)} = 0 \iff$$

$$\frac{b(a-c)}{(a+b)(b+c)} - \frac{5(a-c)}{(a+5)(c+5)} = 0$$

Cum $a-c \neq 0$, obținem:

$$\frac{b}{(a+b)(b+c)} - \frac{5}{(c+5)(a+5)} = 0 \iff$$

$$\frac{abc + 25b - 5b^2 - 5ac}{(a+b)(b+c)(a+5)(c+5)} = 0 \iff$$
$$b(ac - 5b) - 5(ac - 5b) = 0 \iff (ac - 5b)(b - 5) = 0.$$

Dar $b - 5 \neq 0 \implies ac = 5b$. Demonstrăm că $a + b + c + 5$ este număr compus. Din $ac = 5b$ observăm că $5 \mid a$ sau $5 \mid c$. Înlocuim pe b cu $b = \frac{ac}{5}$ și obținem $a + b + c + 5 = a + \frac{ac}{5} + c + 5 = \frac{5a + ac + 5c + 25}{5} = \frac{(a+5)(c+5)}{5} \in \mathbb{N}$ pentru că $a \vdots 5$ sau $c \vdots 5$, deci $a + 5 \vdots 5$ sau $c + 5 \vdots 5$.

Observație 1: O întrebare firească este dacă există numerele a, b, c care verifică datele problemei. Din $ac = 5b$ găsim oricâte astfel de triplete, se poate verifica ușor pentru $(a, b, c) = (9, 27, 15)$.

Observație 2: În mod evident, concluzia nu este condiționată de maniera în care a fost demonstrată problema aici și atunci este firesc să ne întrebăm ce se întâmplă în cazul în care $a = c$ sau $b = 5$. În fiecare dintre cele două situații numărul A este 2 și atunci concluzia nu mai rămâne adevărată.

Barem:

- *a*) Demonstrează $A > 1$ .... $1p$
- Demonstrează $A < 3$ .... $2p$
- *b*) Demonstrează $ac = 5b$ .... $3p$
- Finalizare .... $1p$

□

Problema 3

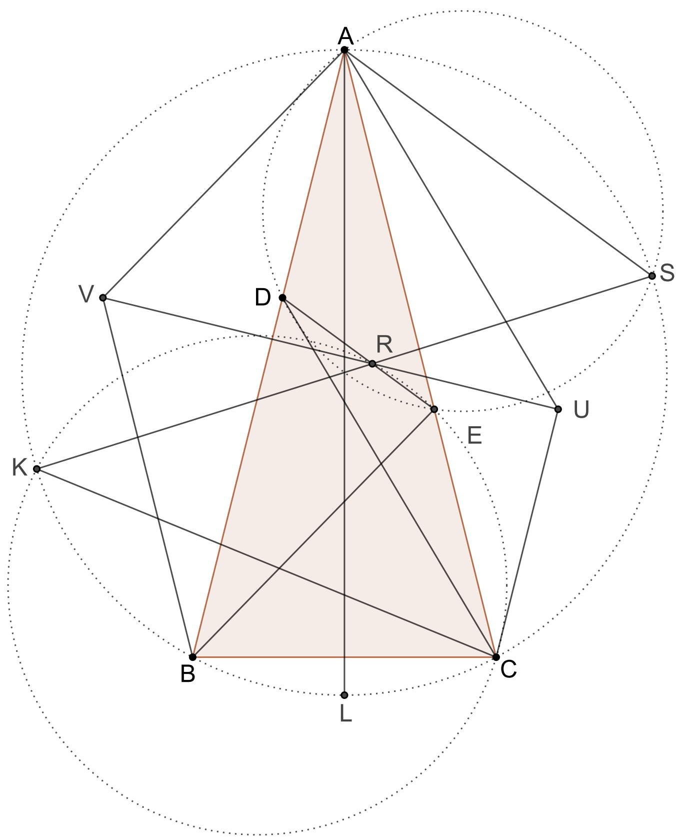
Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$. Fie D și E pe laturile AB și respectiv AC astfel încât $AD = CE$. Se construiesc paralelogramele $AEBV$ și $ADCU$. Fie S intersecția dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ADE și ABC și fie K punctul diametral opus lui S în cercul circumscris triunghiului ABC. Notăm cu R intersecția dreptelor DE și UV.

a) Demonstrați că $(SR$ este bisectoarea unghiului $\angle DSE$.

b) Demonstrați că dreptele SK, DE și UV sunt concurente.

Ana Boiangiu, elevă, București

Demonstrație.



a) Demonstrăm mai întâi că patrulaterul $ADES$ este trapez isoscel.
Avem $\angle SBD = \angle SCE$ și $\angle SDA = \angle SEA$, adică $\angle SDB = \angle SEC$. De aici $\triangle SBD \sim \triangle SCE$, deci
$$\frac{SD}{SE} = \frac{BD}{CE} = \frac{AE}{AD}.$$
Dar $\angle DAE = \angle DSE$, deci $\triangle DAE \sim \triangle ESD$, adică $\triangle DAE \equiv \triangle ESD$ (întrucât au latura comună DE). De aici, patrulaterul $ADES$ este într-adevăr trapez isoscel.
Demonstrăm acum că $(SR$ este bisectoarea unghiului $\angle DSE$.
Avem $BV = AE = BD$ și $\angle DBV = \angle BAC$, de unde $\triangle DBV \sim \triangle BAC$. De aici rezultă imediat că $VD \parallel BC$. în mod analog obținem că $UE \parallel BC$.
Atunci $VD \parallel EU$, de unde
$$\frac{DR}{RE} = \frac{VD}{EU} = \frac{BD}{CE} = \frac{AE}{AD},$$
unde am ținut cont de faptul că $\triangle BDV \sim \triangle CEU \sim \triangle BAC$.
De asemenea, avem
$$\frac{DR}{RE} = \frac{AE}{AD} = \frac{SD}{SE},$$
deci din reciproca teoremei bisectoarei, SR este bisectoarea unghiului $\angle DSE$.

b) Notăm cu 2α măsura unghiului $\angle BAC$ și cu β măsura unghiului $\angle SCA$. Din faptul că punctele A, B, C, K și S sunt conciclice obținem că $\angle SCB + \angle ASB = 180°$, $\angle KSC \equiv \angle KAC$ și $\angle BSK \equiv \angle BAK$.
Știm că SK este diametru în cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$, deci $\angle SAK = 90°$ din conciclicitatea celor 5 puncte. Cum $\triangle ABC$ este isoscel, $\angle ACB = \dfrac{180° - \angle BAC}{2} = 90° - \alpha$, deci $\angle BCS = 90° - \alpha + \beta$. Așadar, $\angle SAB = 180° - 90° + \alpha - \beta = 90° + \alpha - \beta$, deci $\angle BAK = \alpha - \beta$, de unde obținem că $\angle BSK = \alpha - \beta$.
Cum $\angle KAC = \angle BAC - \angle BAK = 2\alpha - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta$, se obține că $\angle KSC \equiv \angle KSA =$

$\alpha + \beta$.
Știm și că $ADES$ este trapez isoscel, deci că $AD = ES = CE$, în concluzie, $\angle ESC \equiv \angle ECS = \beta$. Cum $\triangle SBD \sim \triangle SCE$, se obține că $\angle BSD \equiv \angle ESC = \beta$.
Așadar, $\angle KSE = \angle KSC - \angle ESC = \alpha + \beta - \beta = \alpha$, iar $\angle DSK = \angle DSB + \angle BSK = \beta + \alpha - \beta = \alpha$, deci $\angle KSE \equiv \angle KSD$, de unde obținem că SK este bisectoarea unghiului $\angle DSE$. În concluzie, S, R și K sunt coliniare și concurența este demonstrată.

Variantă: Observăm că SR este simetrica bisectoarei unghiului $\angle DAE$ față de mediatoarea segmentului AS. Dar unghiul $\angle DAE$ este unghiul $\angle BAC$, iar dacă bisectoarea acestuia intersectează cercul circumscris în L, avem AL diametru și deci $AKLS$ dreptunghi, de unde reiese imediat concluzia.

Notă: De fapt, K este punctul Miquel asociat triunghiului ADE și punctelor B, C și R. Avem

$$\angle KRE = 180^\circ - \angle SRE = \angle RSA = \angle KCE,$$

deci K se află pe cercul circumscris triunghiului CKE, ceea ce e suficient.
Barem:

- $a)$ Demonstrează că $ADES$ este trapez isoscel 1p
- Demonstrează $VD \parallel EU \parallel BC$ 1p
- Demonstrează $\dfrac{DR}{RE} = \dfrac{AE}{AD}$ 1p
- Demonstrează că (SR este bisectoarea unghiului $\angle DSE$ 1p
- $b)$ Demonstrează $\angle KSC \equiv \angle KSA$ 1p
- Demonstrează $\angle BSD \equiv \angle ESC$ 1p
- Demonstrează (SK bisectoarea unghiului $\angle DSE$ 1p

□

Problema 4

Andrei are 3 seriale preferate pe care vrea să le revadă pe parcursul a 8 zile, fiecare având câte 12 episoade. Notăm aceste seriale cu I, II, respectiv III. El procedează astfel: în ziua n își alege n episoade consecutive dintr-un singur serial și le urmărește în ordine. De exemplu, în prima zi ar putea să urmărească episodul 5 din serialul II, în a doua zi episoadele 7 și 8 din serialul III, etc. În câte moduri poate Andrei să termine de vizionat cele 3 seriale?

Demonstrație. Observăm mai întâi că, în a șasea, a șaptea și a opta zi, trebuie să vizioneze episoade din seriale diferite, pentru că $6 + 7 = 13 > 12$, adică ar depăși numărul total de episoade dintr-un serial. În plus, în a cincea și în a opta zi nu poate viziona episoade din același serial, pentru că suma lor este 13 și, din nou, depășește numărul total de episoade dintr-un serial. Există două cazuri pe care le vom analiza.

- Dacă, în ziua a cincea și a șaptea, vizionează episoade din același serial, atunci poate urmări serialele în una dintre combinațiile

$$(1,\ 2,\ 3,\ 6)\,, \quad (5,\ 7)\,, \quad (4,\ 8)$$

$$(2,\ 4,\ 6)\,,\quad (5,\ 7)\,,\quad (1,\ 3,\ 8)\,.$$

Pentru prima combinație găsim 3! moduri în care poate alege ce seriale corespund fiecărui pachet: pentru pachetul $(1,\ 2,\ 3,\ 6)$ poate alege oricare dintre cele 3 seriale, pentru pachetul $(5,\ 7)$ oricare dintre cele două care au rămas, iar pentru ultimul rămâne o singură opțiune.
Acum, trebuie să aflăm și în ce ordine va viziona episoadele dintr-un serial, pentru că, de exemplu, pachetul $(5,\ 7)$ poate fi urmărit în două moduri: primele 5 episoade în ziua cu numărul 5 și restul în ziua cu numărul 7, sau ultimele 5 episoade în ziua cu numărul 5 și primele 7 episoade în ziua cu numărul 7, deci 2! moduri. Același lucru este valabil și pentru pachetul $(4,\ 8)$. Pentru pachetul $(1,\ 2,\ 3,\ 6)$ există 24 moduri de alegere a ordinii în care urmărește episoadele, așa cum se vede în tabelul de mai jos.

6	1	2	3
6	1	3	2
6	2	1	3
6	2	3	1
6	3	1	2
6	3	2	1

1	6	2	3
1	6	3	2
2	6	1	3
2	6	3	1
3	6	1	2
3	6	2	1

1	2	6	3
2	1	6	3
1	3	6	2
3	1	6	2
2	3	6	1
3	2	6	1

1	2	3	6
1	3	2	6
2	1	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
3	2	1	6

Prin urmare, numărul total de moduri în acest caz este

$$6 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 2 = 576.$$

Pentru a doua combinație, pachetul $(2,\ 4,\ 6)$ poate fi selectat în 6 moduri: grupul de 6 poate fi o extremitate, adică primele 6 sau ultimele 6 episoade, iar celelalte două grupe pot fi alese de fiecare dată în două moduri sau poate fi format din episoadele 3–8 sau 5–10, astfel încât la extremități să existe grupe de câte 2, respectiv 4 episoade consecutive. Același lucru se întâmplă și pentru pachetul $(1,\ 3,\ 8)$, iar pentru $(5,\ 7)$ rămân tot două variante. În total sunt

$$6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 432$$

moduri.

- Dacă, în ziua a cincea și a șasea, vizionează același serial, atunci există combinația

$$(1,5,6)\,,\quad (2,3,7)\,,\quad (4,8)\,.$$

Primul pachet poate fi ales în 6 moduri, al doilea tot în 6 moduri și ultimul în 2 moduri, deci și în acest caz avem

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$$

variante.

Prin urmare, există

$$576 + 432 + 432 = 1440$$

moduri în care Andrei poate să selecteze ordinea în care va urmări cele 3 seriale.

Barem:

- Observă că în ultimele 3 zile trebuie să vizioneze episoade din seriale diferite 1p
- Numără corect combinațiile pentru cazul zilele 5 și 7 același serial 4p
- Numără corect combinațiile pentru cazul zilele 5 și 6 același serial 2p

□

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$

Timp de lucru: .... 4 ore