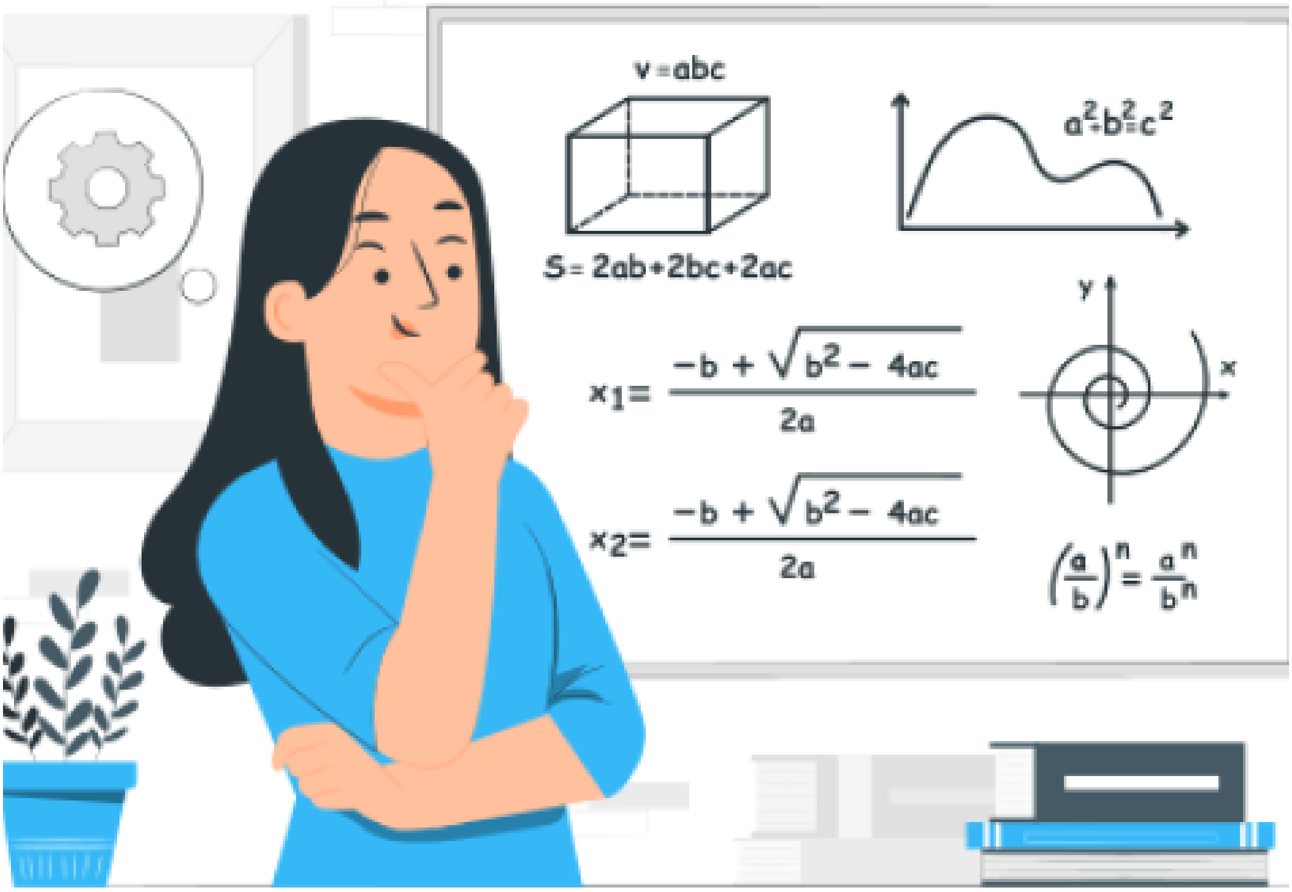


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2024-2025

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

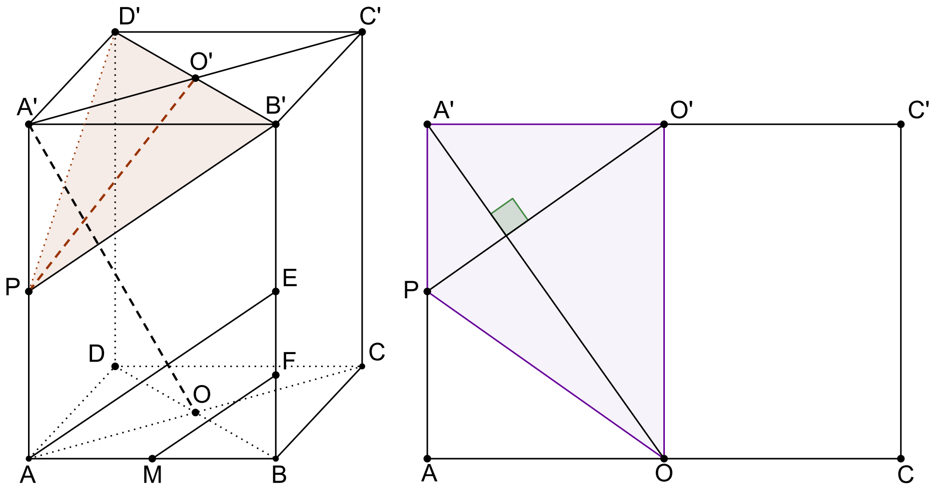
§1 Soluții

Problema 1

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ pătrat de centru O. Notăm cu M mijlocul muchiei AB și considerăm punctul $F \in (BB')$ astfel încât $B'F = 3 \cdot BF$. Arătați că $A'O \perp MF$ dacă și numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Adrian Bud, Negrești Oaş

Demonstrație. Vom nota cu P mijlocul muchiei AA' și $AB = l$, $AA' = h$.
Ideea principală este că dreptele PB' și MF sunt paralele, deci $A'O \perp MF \iff A'O \perp PB'$. Dreapta PB' face parte din planul $(PB'D')$, iar dreptele $A'O$ și $B'D'$ sunt perpendiculare, deci perpendicularitatea din cerința problemei este echivalentă cu $A'O \perp (PB'D')$, care este echivalentă cu perpendicularitatea dintre dreapta $A'O$ și oricare altă dreaptă neparalelă cu $B'D'$ inclusă în planul $(PB'D')$.



Vom demonstra cele afirmate până aici.

- Pentru a demonstra că $MF \parallel PB'$ vom considera mijlocul E al muchiei BB'. În $\triangle ABE$ segmentul MF este linie mijlocie, deci $MF \parallel AE$. Pe de altă parte, $AEB'P$ este paralelogram, deci $AE \parallel PB'$. Din $MF \parallel AE$ și $AE \parallel PB'$ obținem $MF \parallel PB'$.
- $\left.\begin{array}{l} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp A'A \\ A'A \cap A'C' = \{A'\} \\ A'A,\ A'C' \subset (AA'C') \end{array}\right\} \implies B'D' \perp (AA'C')$. Dar $A'O \subset (AA'C') \implies A'O \perp B'D'$.
- Am demonstrat că $A'O \perp B'D'$ și atunci $A'O \perp MF$ dacă și numai dacă $A'O \perp PB'$, lucru echivalent cu $A'O \perp (PB'D')$ echivalent cu $A'O \perp PO'$ pentru că dreptele PO' și $B'D'$ sunt concurente în O'. Ultima perpendicularitate este echivalentă cu faptul că patrulaterul $A'O'OP$ este ortodiagonal, ceea ce e echivalent cu $A'P^2 + O'O^2 = A'O'^2 + OP^2 \iff \frac{h^2}{4} + h^2 = \frac{2l^2}{4} + \frac{2l^2}{4} + \frac{h^2}{4} \iff h = l$.

Barem:

- Demonstrează că $A'O \perp MF \iff A'O \perp PO'$ 4p
- Demonstrează că $A'O \perp PO' \iff h = l$ 3p

□

Problema 2

Demonstrați că pentru orice numere întregi pozitive a, b care îndeplinesc condițiile $a > b$ și $a^2 + ab + b^2 \mid ab(a + b)$ are loc inegalitatea

$$(a - b)^3 > 3ab.$$

Demonstrație. Observăm că

$$a^2 + ab + b^2 \mid a\left(a^2 + ab + b^2\right) - ab(a + b) = a^3$$

Prin urmare, dacă $(a, b) = d$, atunci $a = da_1$ și $b = db_1$ cu $(a_1, b_1) = 1$. În plus, $a_1^2+a_1b_1+b_1^2 \mid da_1^3$. Vom demonstra că $(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2, a_1^3) = 1$. Dacă p este un număr prim care divide simultan cele două numere, atunci $p \mid a_1^3 \implies p \mid a_1 \implies p \mid a_1^2 + a_1b_1$. Dar $p \mid a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 \implies p \mid b_1^2 \implies p \mid b_1$. Dar $(a_1, b_1) = 1$, deci cele două numere nu au niciun factor prim comun, adică $(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2, a_1^3) = 1$. Prin urmare,

$$a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 \mid d$$

și

$$(a - b)^3 \geq d^3 \geq d^2\left(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2\right) = a^2 + ab + b^2 > 3ab.$$

Astfel, deducem că

$$(a - b)^3 > 3ab.$$

Barem:

- Obține $a^2 + ab + b^2 \mid a^3$ . . . . $2p$
- Obține $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 \mid d$ . . . . $2p$
- Observă $(a - b)^3 \geq d^3$ . . . . $1p$
- Finalizare . . . . $2p$

□

Problema 3

Fie $a,\ b,\ c \in\ (0, \infty)$ care verifică

$$\frac{1}{4 + a + \sqrt{a^2 + 32}} + \frac{1}{4 + b + \sqrt{b^2 + 32}} + \frac{1}{4 + c + \sqrt{c^2 + 32}} \leq \frac{1}{4}.$$

Arătați că $a + b + c \geq 6$.

Mihaela Berindeanu, București

Demonstrație. Vom nota

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{a^2 + 32} \\ y = b + \sqrt{b^2 + 32} \\ z = c + \sqrt{c^2 + 32} \end{cases} \implies x, y, z \in (0, \infty)$$

Atunci,

$$x = a + \sqrt{a^2+32} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{a+\sqrt{a^2+32}} = \frac{a-\sqrt{a^2+32}}{-32} \iff \frac{-32}{x} = a - \sqrt{a^2-32}.$$

Prin adunarea relațiilor

$$x = a + \sqrt{a^2+32}$$
$$\frac{-32}{x} = a - \sqrt{a^2-32}$$

obținem

$$a = \frac{1}{2}\left(x - \frac{32}{x}\right) \quad (1)$$

Analog

$$b = \frac{1}{2}\left(y - \frac{32}{y}\right) \quad (2)$$
$$c = \frac{1}{2}\left(z - \frac{32}{z}\right) \quad (3)$$

Atunci,

$$\frac{1}{4+a+\sqrt{a^2+32}} + \frac{1}{4+b+\sqrt{b^2+32}} + \frac{1}{4+c+\sqrt{c^2+32}} \le \frac{1}{4} \iff$$
$$\iff \frac{1}{4+x} + \frac{1}{4+y} + \frac{1}{4+z} \le \frac{1}{4} \iff$$
$$\iff \frac{1}{x+4} - \frac{1}{4} \le -\left(\frac{1}{y+4} + \frac{1}{z+4}\right) \iff$$
$$\iff \frac{-x}{4(x+4)} \le -\left(\frac{1}{y+4} + \frac{1}{z+4}\right)$$

Înmulțim cu -1 și aplicăm inegalitatea CBS

$$\frac{x}{4(x+4)} \ge \frac{1}{y+4} + \frac{1}{z+4} \ge \frac{4}{y+x+8} \implies y+z+8 \ge \frac{16(x+4)}{x} = 16 + \frac{64}{x} \implies$$
$$y + z \ge 8 + \frac{64}{x}$$

Analog

$$z + x \ge 8 + \frac{64}{y}$$
$$x + y \ge 8 + \frac{64}{z}$$

Adunăm relațiile de mai sus și obținem

$$2x+2y+2z \ge 24 + \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + \frac{64}{z} \implies$$
$$x+y+z \ge 12 + \frac{32}{x} + \frac{32}{y} + \frac{32}{z} \iff$$
$$\left(x - \frac{32}{x}\right) + \left(y - \frac{32}{y}\right) + \left(z - \frac{32}{z}\right) \ge 12$$

Revenind la $(1), (2)$ și (3) rezultă:

$$2a+2b+2c \ge 12 \implies a+b+c \ge 6.$$

Cazul de egalitate are loc pentru $a = b = c = 2$.

Barem:

- Obține $\dfrac{x}{4(x+4)} \geq \dfrac{1}{y+4} + \dfrac{1}{z+4}$ . . . . $3p$
- Demonstrează $y + z \geq 8 + \dfrac{64}{x}$ . . . . $2p$
- Finalizare . . . . $2p$

□

Problema 4

Sunt 8 becuri așezate în linie, pe poziții numerotate de la 1 la 8, toate sunt inițial aprinse. La un pas putem stinge două becuri vecine aprinse sau putem aprinde două becuri vecine stinse. Câte variante de model de becuri aprinse sau stinse putem obține după un număr suficient de pași?

Demonstrație. Fie m numărul de becuri în pozițiile $1,\ 3,\ 5$ și 7 care sunt aprinse și fie n numărul de becuri în pozițiile $2,\ 4,\ 6$ și 8 care sunt tot aprinse. Observăm că $m - n = 0$ este inițial. La fiecare mișcare, fie ambele numere m și n cresc cu 1 sau ambele scad cu 1. Atunci $m - n = 0$ mereu, adică sunt tot atâtea becuri aprinse pe pozițiile impare câte sunt și pe pozițiile pare. De exemplu, dacă pe pozițiile impare avem un singur bec aprins, lucru care se poate întâmpla în 4 moduri, atunci și pe pozițiile impare va exista un singur bec aprins, iar poziția acestuia are tot 4 variante, deci sunt $4 \cdot 4 = 16$ configurații posibile. Să numărăm acum câte configurații de becuri aprinse există pentru toate cele 8 becuri. Considerăm becurile în pozițiile $1,\ 3,\ 5$ și 7. Printre acestea putem avea 0, 1, 2, 3 sau 4 becuri aprinse.

- 0 becuri aprinse se pot selecta într-un singur mod;
- 1 bec aprins poate fi selectat în 4 variante, fiecare dintre ele pe rând;
- 2 becuri aprinse pot fi selectate în $4 \cdot 3 : 2 = 6$ moduri, asta revine la a forma perechi neordonate de câte două dintre numerele 1, 3, 5, 7.
- 3 becuri aprinse se pot selecta în 4 moduri pentru că asta revine la cazul cu un singur bec, acesta fiind stins;
- 4 becuri aprinse înseamnă toate, deci o singură variantă.

Cum numărul de becuri aprinse de pe pozițiile impare este egal cu numărul de becuri aprinse pe pozițiile pare, înseamnă că, pentru fiecare dintre variantele pe care le-am numărat mai sus, vor fi tot atâtea și pentru pozițiile pare. De exemplu, pentru pozițiile 1 și 3 aprinse, cele două becuri aprinse de pe pozițiile pare vor putea fi selectate tot în 6 moduri. Numărul maxim de configurații diferite este cel mult $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$.

Vrem să arătăm că toate configurațiile pot fi obținute. Notăm cu 1 starea unui bec aprins și cu 0 pe cea a unuia stins. Să observăm că dacă putem obține un model anterior descris printr-o succesiune de pași, atunci, prin inversarea pașilor, din starea finală revenim la starea inițială.

Descriem modul în care dintr-o stare cu $m = n$ ajungem la starea inițială.

- Configurațiile 11111111 și 00000000 nu necesită explicații.

- O configurație cu 6 de 1 și 2 de 0 impune ca becurile cu starea 0 să fie pe poziții de parități diferite, $a < b$. Facem pașii $[a+1, a+2]$ până la $[b-2, b-1]$, după care becurile $a, \ldots, b$ devin 0. Facem pașii $[a, a+1], \ldots, [b-1, b]$, obținând starea inițială.
Observație: dacă a și b sunt consecutive, facem direct pasul $[a, b]$

- O configurație cu 6 de 0 și 2 de 1 se tratează analog.

- În fine, considerăm o configurație cu 4 de 1 și 4 de 0, și fie $a < b < c < d$ becurile stinse (0). Dacă cele 4 sunt consecutive, pașii $[a, b], [c, d]$ produc starea inițială, Dacă două sunt consecutive, de pildă a și b, atunci pasul $[a, b]$ produce o configurație cu 6 de 0, studiată anterior. Dacă nu sunt numere consecutive, cum două dintre a, b, c, d sunt pare și două impare, una dintre perechile (a, b), (b, c) sau (c, d) au parități diferite; fie, de pildă, $a < b$ această pereche. Cum $a < b - 2$, putem face pasul $[a+1, a+2]$ și ajungem în cazul anterior.

Barem:

- Identifică invariantul .... $2p$
- Determină numărul total de configurații .... $2p$
- Justifică obținerea oricărei configurații .... $3p$

□

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$

Timp de lucru: .... 4 ore