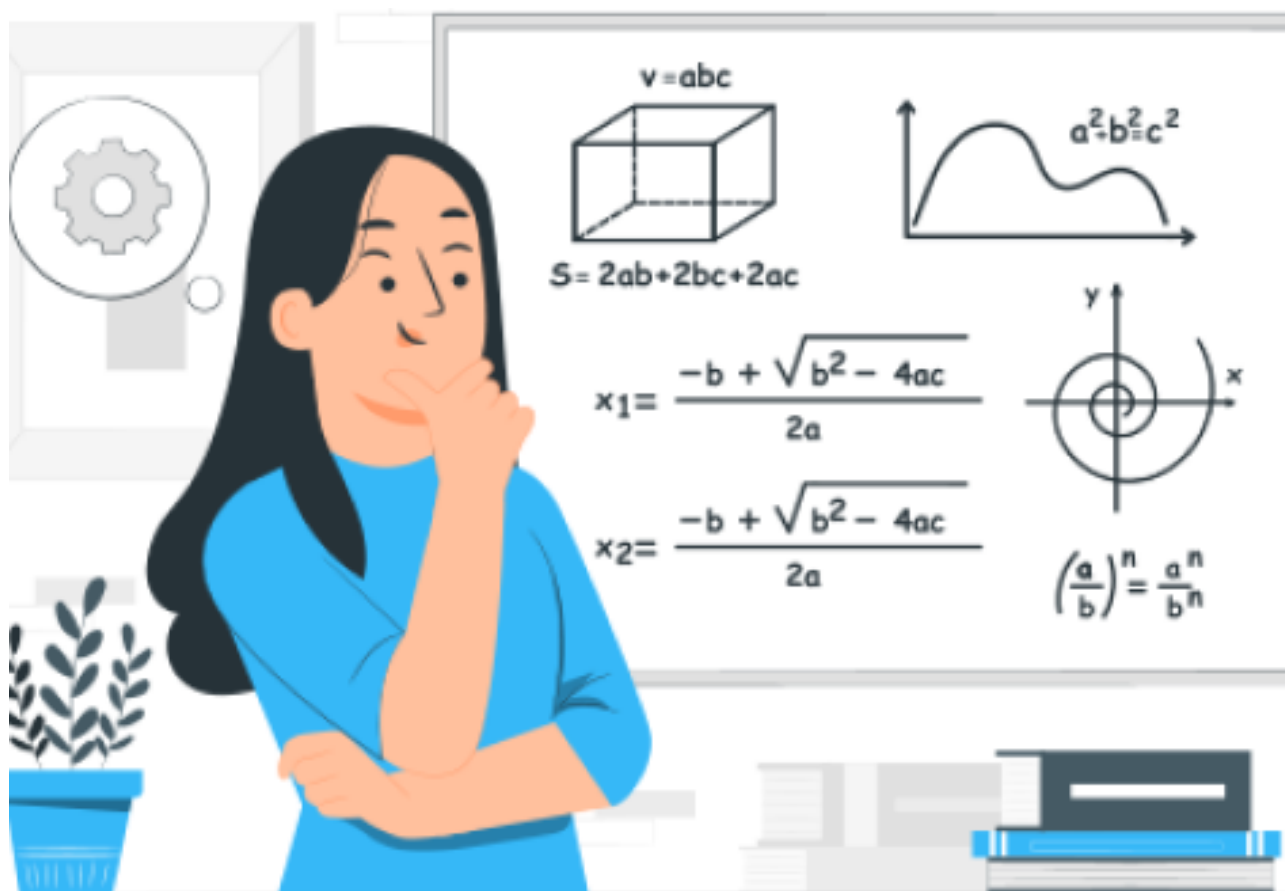




# Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa I  
Clasa a V-a

- Soluții -  
Lioara Ivanovici

## §1 Soluții

### Problema 1

Într-o urnă sunt 15 bile de trei culori diferite: galbene, verzi și albastre. Știm că, oricum am extrage 12 bile din cutie, printre ele vom găsi cel puțin o bilă galbenă, cel puțin două bile verzi și cel puțin 3 bile albastre. Vom nota cu  $g$  numărul de bile galbene, cu  $v$  numărul de bile verzi și cu  $a$  numărul de bile albastre. Care este valoarea produsului  $g \cdot v \cdot a$ ?

- a) 144                      b) 96                      c) 120                      d) 100

*Demonstrație.*

- Dacă numărul de bile galbene este cel mult 3, atunci numărul bilelor verzi și albastre este cel puțin 12 și există posibilitatea ca la extragerea a 12 bile din urnă să nu avem nicio bilă galbenă, toate bilele galbene rămânând în urnă. Așadar,  $g \geq 4$ .
- Dacă numărul de bile verzi este cel mult 4, repetând raționamentul de mai sus, există posibilitatea ca la extragerea a 12 bile din urnă să extragem o bilă verde și 11 din celelalte două culori. Așadar,  $v \geq 5$ .
- Dacă numărul de bile albastre este cel mult 5, repetând raționamentul de mai sus, există posibilitatea ca la extragerea a 12 bile din urnă să extragem două bile albastre și 10 din celelalte două culori. Așadar,  $a \geq 6$ .

Am obținut  $g + v + a \geq 4 + 5 + 6 = 15$ , dar și  $g + v + a = 15$ , deci  $g = 4$ ,  $v = 5$ ,  $a = 6$ , iar valoarea produsului  $g \cdot v \cdot a$  este egal cu 120.

**Răspuns corect:** c) ..... 5p

□

### Problema 2

Dacă  $A = 201 \cdot 2^{n+1} \cdot 15^n - 6^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 10^n$  se termină cu exact 2025 zerouri, atunci  $n$  este egal cu:

- a) 2025                      b) 2024                      c) 2023                      d) 2022

*Demonstrație.*

$$\begin{aligned}
 A &= 201 \cdot 2^{n+1} \cdot 15^n - 6^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 10^n \\
 A &= 201 \cdot 2^{n+1} \cdot (3 \cdot 5)^n - (2 \cdot 3)^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot (2 \cdot 5)^n \\
 A &= 201 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n \cdot 5^n - 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^n \cdot 5^n \\
 A &= 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot (201 \cdot 2 - 5 + 3) \\
 A &= 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 400 \\
 A &= 4 \cdot 3^n \cdot (2 \cdot 5)^n \cdot 10^2 \\
 A &= 4 \cdot 3^n \cdot 10^n \cdot 10^2 \\
 A &= 4 \cdot 3^n \cdot 10^{n+2}
 \end{aligned}$$

Cum ultimele 2025 cifre sunt egale cu 0, înseamnă că  $n + 2 = 2025$ , deci valoarea lui  $n$  este 2023.

**Răspuns corect:** c) ..... 5p

□

**Problema 3**

Determinați numărul numerelor naturale  $\overline{abcd}$  care împărțite la  $\overline{abc}$  dau câtul  $\overline{ab}$  și restul  $a$ .

a) 9000

b) 9

c) 0

d) 10

*Demonstrație.*

$$\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot \overline{ab} + a$$

$$10 \cdot \overline{abc} + d = \overline{abc} \cdot \overline{ab} + a$$

$$d = \overline{abc} \cdot (\overline{ab} - 10) + a$$

Cum  $d$  este cifră și  $\overline{abc}$  este un număr de 3 cifre, înseamnă că  $\overline{ab} = 10$ , de unde rezultă și că  $d = a = 1$ , iar  $c$  poate lua orice valoare de la 0 la 9. Orice număr de forma  $\overline{10c1}$  este soluție a ecuației, iar numărul lor este egal cu  $\boxed{10}$ .

**Răspuns corect:**  $\boxed{d)$  ..... 5p

□

**Problema 4**

La o masă rotundă cele 49 de scaune sunt ocupate cu 49 de copii și sunt numerotate în ordine cu numerele  $1, 2, 3, \dots, 49$ . Avem la dispoziție 49 de cartonașe numerotate cu  $1, 2, 3, \dots, 49$  care se împart aleatoriu copiilor de la masă. Copiii de pe scaunele cu numerele  $3, 6, 9, \dots, 48$  și cei de pe scaunele cu numerele  $4, 8, 12, \dots, 48$  pleacă de la masă. Care este cea mai mică sumă posibilă a numerelor cartonașelor copiilor care au rămas la masă?

a) 231

b) 210

c) 325

d) 340

*Demonstrație.*

- Copiii de pe scaunele cu numerele  $3, 6, 9, \dots, 48$  pleacă. Aceste numere se pot scrie

$$3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 16.$$

Sunt 16 astfel de scaune.

- Copiii de pe scaunele cu numerele  $4, 8, 12, \dots, 48$  pleacă. Aceste numere se pot scrie

$$4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 12.$$

Sunt 12 astfel de scaune.

- Următoarele scaune apar în ambele liste și au fost numărate de 2 ori

$$12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, 12 \cdot 4.$$

Sunt 4 astfel de scaune.

Prin urmare pleacă  $16 + 12 - 4 = 24$  copii și rămân  $49 - 24 = 25$  copii. Pentru ca suma numerelor de pe cartonașe să fie minimă, le dăm celor rămași cele mai mici 25 numere. Astfel suma minimă este  $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$ .

**Răspuns corect:**  $\boxed{c)$  ..... 5p

□

**Problema 5**

Numărul de numere pare de două cifre având ambele cifre diferite este egal cu:

- a) 45                      b) 43                      c) 42                      d) 41

*Demonstrație.* Numărul numerelor de două cifre este 90. Dintre acestea, jumătate sunt pare și jumătate impare, adică sunt 45 de numere pare dintre care 22, 44, 66 și 88 nu au cifrele distincte. Numărul celor care au cifrele distincte este  $45 - 4 = \boxed{41}$ .

**Răspuns corect:** ☒ d) ..... 5p

□

**Problema 6**

Considerăm următorul joc:

- În vârfurile unui triunghi se scriu inițial numerele naturale 1, 2, 3.
- Numim pas următoarea operație: în fiecare vârf se înlocuiește numărul scris cu suma numerelor din celelalte două vârfuri, iar înlocuirile se fac simultan.

Determinați cel mai mic număr de pași după care suma numerelor din cele trei vârfuri devine un număr de 5 cifre.

- a) 10                      b) 11                      c) 12                      d) 13

*Demonstrație.* Dacă în cele 3 vârfuri ale triunghiului sunt numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , atunci, după un pas noile numere din vârfuri sunt  $b + c$ ,  $a + c$ , respectiv  $a + b$ , cu suma  $2 \cdot (a + b + c)$ , adică dublul sumei anterioare. Asta înseamnă că suma numerelor din cele 3 vârfuri se dublează după fiecare pas. Inițial suma celor 3 numere este 6, după pasul 1 suma este  $2 \cdot 6$ , după pasul 2 suma este  $2^2 \cdot 6$ , după pasul  $n$  suma este  $2^n \cdot 6$ . Trebuie să aflăm cel mai mic număr  $n$  pentru care  $2^n \cdot 6 \geq 10000 \iff 2^n > 1666$ . Cum  $2^{10} = 1024$  și  $2^{11} = 2048$ , obținem că valoarea minimă a lui  $n$  este  $\boxed{11}$ .

**Răspuns corect:** ☒ b) ..... 5p

□

**Problema 7**

Determinați suma numerelor de două cifre  $\overline{ab}$ , unde cifrele  $a$  și  $b$  verifică relația

$$a^2 \cdot \overline{aa}^2 = \overline{bb}^2.$$

- a) 74                      b) 98                      c) 35                      d) 50

*Demonstrație.*  $a^2 \cdot \overline{aa}^2 = \overline{bb}^2 \iff a^2 \cdot a^2 \cdot 11^2 = b^2 \cdot 11^2 \iff a^2 \cdot a^2 = b^2 \iff (a^2)^2 = b^2 \iff a^2 = b$ . Deci,  $b$  este cifră nenulă și pătrat perfect, adică  $b \in \{1, 4, 9\}$  și  $\overline{ab} \in \{11, 24, 39\}$ . Suma numerelor care verifică relația dată este  $11 + 24 + 39 = \boxed{74}$ .

**Răspuns corect:** ☒ a) ..... 5p

□

**Problema 8**

Ana și Bogdan au împreună 800 de lei. Dacă Ana îi dă lui Bogdan din banii ei tot atâția bani cât are el deja, atunci cei doi vor avea sume egale de bani. Câți lei avea inițial Ana?

a) 400 lei

b) 500 lei

c) 300 lei

d) 600 lei

*Demonstrație.* Reprezentăm grafic sumele după ce Ana îi dă lui Bogdan o sumă egală cu banii lui inițiali.



Fiecare copil are acum  $800 : 2 = 400$  lei. La Bogdan, cei 400 lei sunt formați din banii lui inițiali și aceeași sumă primită de la Ana. Așadar banii inițiali ai lui Bogdan sunt  $400 : 2 = 200$  lei. Prin urmare suma inițială a Anei este  $800 - 200 = \boxed{600 \text{ lei}}$ .

**Răspuns corect:** ☐ d) ..... 5p

☐**Problema 9**

Maria pleacă de acasă spre magazin. La jumătatea drumului își amintește că a uitat banii, se întoarce acasă să îi ia, apoi merge la magazin și după cumpărături se întoarce direct acasă. În total a parcurs 450 metri. Aflați distanța de la casa Mariei până la magazin.

a) 225 metri

b) 90 metri

c) 75 metri

d) 150 metri

*Demonstrație.* Maria merge până la jumătatea drumului și se întoarce acasă, deci a parcurs exact distanța de la casă la magazin. Apoi merge de acasă la magazin și se întoarce direct acasă, deci mai parcurge de două ori această distanță. În total parcurge distanța de la casă la magazin de trei ori. Așadar, distanța de la casa Mariei până la magazin este  $450 : 3 = \boxed{150 \text{ metri}}$ .

**Răspuns corect:** ☐ d) ..... 5p

☐**Problema 10**

În fiecare zi, după prânz, George cheltuiește jumătate din banii pe care îi are în portofel. Când ajunge acasă, mama îi mai pune 2 lei în portofel, iar seara tata îi dublează suma pe care o găsește în portofel. În dimineața celei de-a 36-a zi, George are 148 de lei în portofel. Câți bani a avut la început?

a) 4 lei

b) 6 lei

c) 8 lei

d) 9 lei

*Demonstrație.* Când se întoarce acasă, George mai are jumătate din banii pe care îi avea dimineață. Tatăl dublează suma pe care o găsește în portofel, adică jumătate din banii pe care îi avea dimineață plus cei 2 lei pe care îi pusese mama. Asta înseamnă că la sfârșitul zilei George are din nou în portofel suma pe care o avea dimineață plus încă 4 lei. Deci, suma din portofel crește cu 4 lei în fiecare zi. Pentru că el are 148 de lei în dimineața celei de-a 36-a zile, înseamnă că acțiunile s-au întâmplat pe durata a 35 de zile, timp în care suma a crescut cu  $4 \times 35 = 140$  lei. Suma pe care a avut-o inițial George în portofel a fost de  $148 - 140 = \boxed{8 \text{ lei}}$ .

**Răspuns corect:** ☐ c) ..... 5p

**Problema 11**

Numărul soluțiilor ecuației  $x^x = 3^{324}$  este egal cu:

- a) 0                                      b) 1                                      c) 2                                      d) 3

*Demonstrație.*  $324 = 4 \cdot 81$ , deci  $3^{324} = 3^{4 \cdot 81} = (3^4)^{81} = 81^{81}$ . Pentru numere naturale, dacă  $x > 81$ , atunci  $x^x > 81^{81}$ , deci nu avem soluții mai mari ca 81 și dacă  $x < 81$ , atunci  $x^x < 81^{81}$ , deci nu avem nici soluții mai mici decât 81. Prin urmare, numărul soluțiilor ecuației  $x^x = 3^{324}$  este egal cu  $\boxed{1}$ .

**Răspuns corect:**  $\boxed{b)}$  ..... 5p

**Problema 12**

Numerele naturale  $a, b, c$  verifică simultan următoarele condiții:

- i)  $2025 \cdot a + b + c = 2030$   
 ii)  $a + 2025 \cdot b + c = 4054$   
 iii)  $a + b + 2025 \cdot c = 6078$ .

Valoarea produsului  $a \cdot b \cdot c$  este egală cu:

- a) 12                                      b) 1                                      c) 6                                      d) 4

*Demonstrație.* Adunăm cele 3 ecuații și obținem  $2027 \cdot a + 2027 \cdot b + 2027 \cdot c = 12162 \iff 2027 \cdot (a + b + c) = 12162 \iff a + b + c = 6$ .

- $2025 \cdot a + b + c = 2030 \iff 2024 \cdot a + a + b + c = 2030 \iff 2024 \cdot a + 6 = 2030 \iff 2024 \cdot a = 2024 \iff a = 1$ ;
- $a + 2025 \cdot b + c = 4054 \iff a + b + c + 2024 \cdot b = 4054 \iff 2024 \cdot b + 6 = 4054 \iff 2024 \cdot b = 4048 \iff b = 2$ ;
- $a + b + 2025 \cdot c = 6078 \iff a + b + c + 2024 \cdot c = 6078 \iff 6 + 2024 \cdot c = 6078 \iff 2024 \cdot c = 6072 \iff c = 3$ .

Valoarea produsului  $a \cdot b \cdot c$  este egală cu  $\boxed{6}$ .

**Răspuns corect:**  $\boxed{c)}$  ..... 5p

**Problema 13**

Un număr natural se numește *fericit* dacă are 5 cifre, oricare două diferite, iar suma oricăror două cifre vecine este număr par. Câte numere *fericite* există?

- a) 5625                                      b) 216                                      c) 6750                                      d) 96

*Demonstrație.* Ca suma oricăror două cifre vecine să fie număr par e necesar ca toate cifrele numărului să aibă aceeași paritate.

- Dacă cifrele sunt impare, atunci prima cifră poate lua 5 valori, oricare dintre cifrele 1, 3, 5, 7, 9, a doua cifră poate lua oricare dintre cele 4 valori care au rămas după ce a fost fixată prima, pentru a treia au mai rămas 3 valori dintre care putem alege, pentru a patra două, iar ultima este unic determinată. Astfel se obțin  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  numere care au toate cifrele impare.
- Dacă cifrele sunt pare, atunci prima cifră poate lua 4 valori, oricare dintre cifrele 2, 4, 6, 8, prima cifră nu poate fi 0. A doua cifră poate lua oricare dintre cele 4 valori care au rămas după ce a fost fixată prima, inclusiv 0, pentru a treia au mai rămas 3 valori dintre care putem alege, pentru a patra două, iar ultima este unic determinată. Astfel se obțin  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$  numere care au toate cifrele pare.

Numărul de numere *fericite* este egal cu  $120 + 96 = \boxed{216}$ .

**Răspuns corect:** ☒ b) ..... 5p



### Problema 14

Se împart 11 numere naturale consecutive la 7 și se adună resturile. Care este cea mai mare valoare a acestei sume pe care o putem obține?

a) 42

b) 46

c) 37

d) 39

*Demonstrație.* Resturile care se obțin la aceste împărțiri sunt

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Evident primul nu este neapărat 0. În orice grup de 11 numere naturale consecutive apar toate resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o dată, iar încă 4 resturi se repetă. Pentru ca suma totală să fie maximă, aceste 4 resturi trebuie să fie cât mai mari, adică 3, 4, 5, 6. Prin urmare, suma maximă a resturilor este:

$$(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (3 + 4 + 5 + 6) = 21 + 18 = \boxed{39}.$$

Un exemplu care realizează această sumă este următorul:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

**Răspuns corect:** ☒ d) ..... 5p



### Problema 15

Restul împărțirii numărului  $A = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{100}$  la 45 este egal cu:

a) 9

b) 1

c) 0

d) 3

*Demonstrație.* Calculăm suma primilor doi termeni și observăm că rezultatul se împarte exact la 45, adică  $9 + 9^2 = 90 = 45 \cdot 2$ , prin urmare vom grupa termenii câte doi.

$$S = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{100} = (9 + 9^2) + (9^3 + 9^4) + (9^5 + 9^6) + \dots + (9^{99} + 9^{100}) = 90 + 9^2 \cdot (9 + 9^2) + 9^4 \cdot (9 + 9^2) + \dots + 9^{98} \cdot (9 + 9^2) = 90 + 9^2 \cdot 90 + 9^4 \cdot 90 + \dots + 9^{98} \cdot 90 = 90 \cdot (1 + 9^2 + 9^4 + \dots + 9^{98}) = 45 \cdot 2 \cdot (1 + 9^2 + 9^4 + \dots + 9^{98}), \text{ deci restul împărțirii numărului } A \text{ la } 45 \text{ este } \boxed{0}.$$

**Răspuns corect:** ☒ c) ..... 5p

□

### Problema 16

Andrei a scris pe tablă toate numerele de la 1 la 15 și apoi le-a împărțit în 5 grupe de câte 3 numere fiecare pe care le-a notat  $A, B, C, D$ , respectiv  $E$ . Suma numerelor din grupa  $A$  este 25, din grupa  $B$  este 27, din grupa  $C$  este 30, iar suma numerelor din grupa  $D$  este 31. În care dintre cele 5 grupe a fost scris numărul 4?

a)  $B$ b)  $C$ c)  $E$ d)  $D$ 

*Demonstrație.* Suma tuturor numerelor scrise pe tablă este  $1 + 2 + 3 + \dots + 15 = 15 \cdot (1 + 15) : 2 = 120$ . Suma numerelor din grupele  $A, B, C$  și  $D$  este  $25 + 27 + 30 + 31 = 113$ , deci în grupa  $E$  suma este  $120 - 113 = 7$ . Singurul mod în care poate fi scris numărul 7 ca sumă a 3 numere naturale nenule distincte este  $1 + 2 + 4$ , deci grupa din care face parte numărul 4 este grupa  $E$ . Un exemplu de distribuire a numerelor este următorul:

- $25 = 3 + 7 + 15$
- $27 = 5 + 8 + 14$
- $30 = 6 + 11 + 13$
- $31 = 9 + 10 + 12$
- $7 = 1 + 2 + 4$

**Răspuns corect:** ☒ c) ..... 5p

□

**Problemele 1-16:** .....  $16 \times 5p = 80p$

**Puncte acordate din oficiu:** ..... 20p

**Total:** ..... 100p

**Timp de lucru:** ..... 2 ore