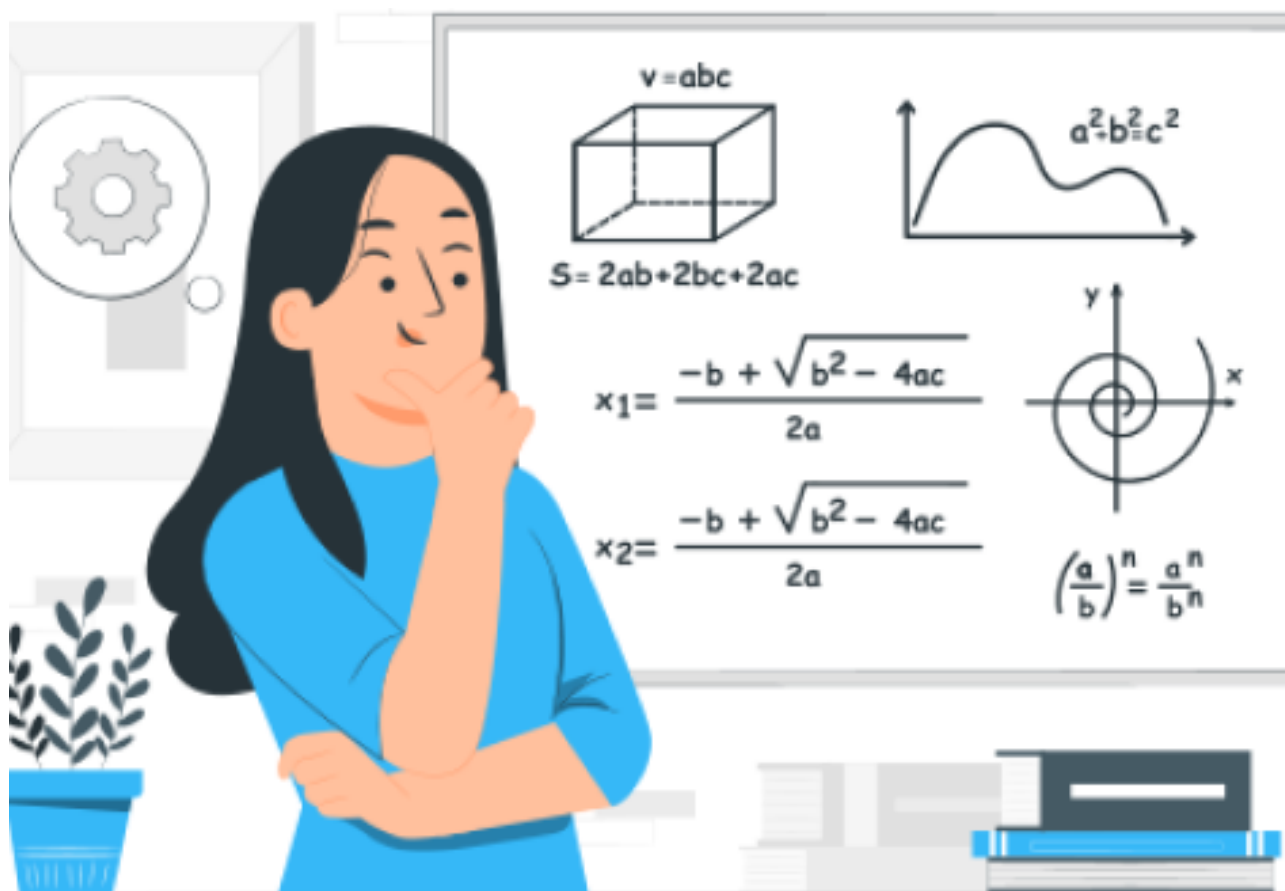




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa I
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Câte numere naturale cuprinse între $2^{10} + 1$ și $2^{18} - 1$ se divid cu 2^{10} ?

- a) 256 b) 255 c) 254 d) 512

Demonstrație. Numerele care se divid cu 2^{10} sunt de forma $2^{10} \cdot k$, prin urmare trebuie să aflăm valorile lui k pentru care $2^{10} < 2^{10} \cdot k < 2^{18} \iff 1 < k < 2^8 \iff k \in \{2, 3, 4, \dots, 255\}$. Numărul de numere care verifică cerințele problemei este egal cu 254.

Răspuns corect: c) 5p

□

Problema 2

Vom spune despre un număr natural de 4 cifre că este *docil*, dacă prin eliminarea oricărei cifre a lui, numărul rezultat de 3 cifre este un divizor al numărului original. Câte numere de 4 cifre sunt *docile*?

- a) 14 b) 9 c) 27 d) 234

Demonstrație. Vom nota cu $\overline{abcd}$ un astfel de număr.

- $\overline{abc} \mid \overline{abcd}$, dar $\overline{abc} \mid \overline{abc0} \implies \overline{abc} \mid d \implies d = 0$;
- $\overline{ab0} \mid \overline{abcd}$, dar $\overline{ab0} \mid \overline{ab00} \implies \overline{ab0} \mid \overline{c0} \implies c = 0$;
- $\overline{b00} \mid \overline{abcd}$, dar $\overline{b00} \mid \overline{b00} \implies \overline{b00} \mid \overline{a000} \implies b \mid \overline{a0}$.
- $\overline{a00} \mid \overline{abcd}$, dar $\overline{a00} \mid \overline{a000} \implies \overline{a00} \mid \overline{b00} \implies a \mid b$.

Am obținut, astfel, că $a \mid b$ și $b \mid \overline{a0}$. Vom număra câte astfel de numere există dându-i pe rând valori nenule cifrei a .

- $a = 1 \implies 1 \mid b \mid 10 \implies b \in \{1, 2, 5\}$;
- $a = 2 \implies 2 \mid b \mid 20 \implies b \in \{2, 4\}$;
- $a = 3 \implies 3 \mid b \mid 30 \implies b \in \{3, 6\}$;
- $a = 4 \implies 4 \mid b \mid 40 \implies b \in \{4, 8\}$;
- $a = 5 \implies 5 \mid b \mid 50 \implies b \in \{5\}$;
- $a = 6 \implies 6 \mid b \mid 60 \implies b \in \{6\}$;
- $a = 7 \implies 7 \mid b \mid 70 \implies b \in \{7\}$;
- $a = 8 \implies 8 \mid b \mid 80 \implies b \in \{8\}$;
- $a = 9 \implies 9 \mid b \mid 90 \implies b \in \{9\}$.

Numărul de numere *docile* este 14.

Răspuns corect: a) 5p

□

Problema 3

Câte triplete (a, b, c) de numere prime există, știind că $a < b < c$, $c - a < 10$ și $a^2 + b^2 + c^2$ este număr prim?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Demonstrație. Analizăm următoarele cazuri:

- Dacă $a = 2$, atunci b și c sunt impare $\implies a^2 + b^2 + c^2 \div 2$ și $a^2 + b^2 + c^2 > 2$, adică este număr compus și nu convine.
- Dacă $a, b, c > 3 \implies a^2, b^2, c^2 \in \mathcal{M}_3 + 1 \implies a^2 + b^2 + c^2 \div 3$ și $a^2 + b^2 + c^2 > 3$, deci este număr compus și din nou nu convine.

Așadar, $a = 3$ și $c - 3 < 10 \implies c < 13$, c este număr prim $\implies c \in \{7, 11\}$.

- $c = 7 \implies b = 5$. Atunci $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 9 + 25 + 49 = 83$, care este număr prim.
- $c = 11 \implies b \in \{5, 7\}$.
Dacă $b = 5$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 5^2 + 11^2 = 155$, care este număr compus.
Dacă $b = 7$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 7^2 + 11^2 = 179$, care este număr prim.

Tripletele care verifică cele 3 condiții ale problemei sunt $(a, b, c) \in \{(3, 5, 7), (3, 7, 11)\}$. Numărul tripletelor care sunt soluții ale problemei este egal cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 4

Cel mai mic produs a 3 numere distincte din mulțimea $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right\}$ este egal cu:

a) $\frac{1}{24}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{56}$ d) $\frac{1}{12}$

Demonstrație. Frațiile din mulțime sunt de tipul $\frac{n}{n+1}$ și pentru a obține cel mai mic produs trebuie să înmulțim cele mai mici numere. Vom demonstra că $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \iff \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \iff n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$, inegalitate adevărată. Prin urmare, cele mai mici elemente din mulțimea A sunt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, iar produsul lor este $\boxed{\frac{1}{4}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 5

Valoarea sumei $S = \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{10 \cdot 6} + \frac{1}{15 \cdot 8} + \frac{1}{20 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{120 \cdot 50}$ este:

- a) $\frac{29}{120}$ b) $\frac{23}{240}$ c) $\frac{13}{120}$ d) $\frac{12}{125}$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{10 \cdot 6} + \frac{1}{15 \cdot 8} + \frac{1}{20 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{120 \cdot 50} = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{24 \cdot 25} \right) = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{5-4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{25-24}{24 \cdot 25} \right) = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{24} - \frac{1}{25} \right) = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot \frac{24}{25} = \boxed{\frac{12}{125}} \end{aligned}$$

Răspuns corect: d 5p

☐

Problema 6

Aflați cea mai mare valoare a numărului natural n știind că mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ conține exact 674 de numere pare nedivizibile cu 3.

- a) 2025 b) 2020 c) 2021 d) 2023

Demonstrație. Numerele pare nedivizibile cu 3 sunt de forma $6k + 2$ sau $6k + 4$. Dintre cele 674 numere pare nedivizibile cu 3, jumătate sunt de forma $6k + 2$ și celelalte 337 sunt de forma $6k + 4$. Cum primul număr este $2 = 6 \cdot 0 + 2$, înseamnă că ultimul număr par nedivizibil cu 3 este $6 \cdot 336 + 4 = 2020$. Observăm că 2021 este impar, iar 2022 este par și divizibil cu 3, deci niciunul dintre aceste numere nu este par nedivizibil cu 3. De asemenea, 2023 este impar, deci nici el nu se numără. În schimb, $2024 = 6 \cdot 337 + 2$ este par și nedivizibil cu 3, deci ar apărea încă un astfel de număr, ceea ce nu este permis. Prin urmare, cea mai mare valoare a lui n este 2023.

Răspuns corect: d 5p

☐

Problema 7

Numerele naturale nenule x și y verifică relația

$$(x + y) \cdot (5x + 1) = 2025.$$

Care este produsul numerelor x și y ?

- a) 144 b) 81 c) 0 d) 225

Demonstrație. $(x + y) \cdot (5x + 1) = 2025 \implies 5x + 1 \mid 2025$, deci $5x + 1$ este un divizor al lui 2025 de forma $5^k + 1$. Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \implies 5x + 1$ este un divizor al lui 2025 nedivizibil cu 5, deci vom căuta doar printre cei de forma 3^k . Singurii care sunt de forma căutată sunt 1 și 81.

- $5x + 1 = 1 \iff x = 0$, soluție care nu convine pentru că numerele sunt nenule.
- $5x + 1 = 81 \iff x = 16$ și $y = 9$.

Produsul numerelor x și y este $16 \cdot 9 = \boxed{144}$.

Răspuns corect: ☐ a) 5p
☐

Problema 8

Câte dintre fracțiile $\frac{\overline{abc}}{2025}$ sunt ireductibile?

- a) 420 b) 540 c) 600 d) 480

Demonstrație. Numărul fracțiilor de forma $\frac{\overline{abc}}{2025}$ este egal cu numărul numerelor naturale de 3 cifre, adică 900. Frația $\frac{\overline{abc}}{2025}$ este ireductibilă dacă numerele $\overline{abc}$ și 2025 au ca unic divizor comun pe 1, adică cele două numere nu au factori primi comuni în descompunere. Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, înseamnă că vom căuta numerele care nu se divid cu 3 sau cu 5.

- numerele divizibile cu 3 sunt de la $102 = 3 \cdot 34$ până la $999 = 3 \cdot 333$, adică sunt $333 - 33 = 300$.
- cele divizibile cu 5 sunt de la $100 = 5 \cdot 20$ până la $995 = 5 \cdot 199$, adică $199 - 19 = 180$.
- numerele divizibile cu 15 sunt de la $105 = 15 \cdot 7$ până la $990 = 15 \cdot 66$, adică sunt $66 - 6 = 60$.

Aplicând principiul includerii și excluderii obținem că numărul de fracții reductibile este $300 + 180 - 60 = 420$, iar numărul celor ireductibile este $900 - 420 = \boxed{480}$.

Răspuns corect: ☐ d) 5p
☐

Problema 9

Care este suma elementelor mulțimii

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{9 \cdot 2^n}{2^n + 2} \in \mathbb{N} \right\}?$$

- a) 4 b) 10 c) 6 d) 8

Demonstrație. $\frac{9 \cdot 2^n}{2^n + 2} \in \mathbb{N} \iff 2^n + 2 \mid 9 \cdot 2^n$. Dar $2^n + 2 \mid 2^n + 2 \implies 2^n + 2 \mid 9 \cdot 2^n + 18 \implies 2^n + 2 \mid 9 \cdot 2^n + 18 - 9 \cdot 2^n \implies 2^n + 2 \mid 18 \implies 2^n + 2 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Vom găsi soluții în cazurile:

- $2^n + 2 = 3 \iff n = 0$

- $2^n + 2 = 6 \iff n = 2$
- $2^n + 2 = 18 \iff n = 4$

Prin urmare $A = \{0, 2, 4\}$ și suma elementelor mulțimii A este $0 + 2 + 4 = \boxed{6}$.

Răspuns corect: c) 5p

□

Problema 10

Pentru câte numere naturale n de forma $\overline{abc}$ fracția $\frac{3n+7}{2n+5}$ este reductibilă?

- a) 900 b) 0 c) 167 d) 334

Demonstrație. $\begin{cases} d \mid 3n+7 \\ d \mid 2n+5 \end{cases} \implies \begin{cases} d \mid 6n+14 \\ d \mid 6n+15 \end{cases} \implies d \mid 6n+15-6n-14 \implies d \mid 1 \implies d = 1$. Așadar, toate fracțiile de forma $\frac{3n+7}{2n+5}$ sunt ireductibile, deci numărul celor reductibile este $\boxed{0}$.

Răspuns corect: b) 5p

□

Problema 11

Fie mulțimea $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2 + y^2}{26} = \frac{x \cdot y}{[x, y]}, x, y \in \mathbb{N}^* \right\}$ unde $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y . Numărul de elemente al mulțimii A este:

- a) 2 b) 4 c) 5 d) 3

Demonstrație. Vom nota cu $d = (x, y) \implies x = da$ și $y = db$, $(a, b) = 1$. Atunci,

$$\frac{x^2 + y^2}{26} = \frac{x \cdot y}{[x, y]} \iff \frac{d^2 a^2 + d^2 b^2}{26} = \frac{da \cdot db}{dab} \iff$$

$$\frac{a^2 + b^2}{26} = \frac{1}{d} \iff d(a^2 + b^2) = 26.$$

Vom analiza următoarele cazuri:

- $d = 1$ și $a^2 + b^2 = 26 \implies (a, b) \in \{(1, 5), (5, 1)\} \implies (x, y) \in \{(1, 5), (5, 1)\}$;
- $d = 2$ și $a^2 + b^2 = 13 \implies (a, b) \in \{(2, 3), (3, 2)\} \implies (x, y) \in \{(4, 6), (6, 4)\}$;
- $d = 13$ și $a^2 + b^2 = 2 \implies (a, b) \in \{(1, 1)\} \implies (x, y) \in \{(13, 13)\}$;
- $d = 26$ și $a^2 + b^2 = 1 \implies (a, b) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$, dar numerele căutate sunt nenule, deci în acest caz nu avem soluții.

Numărul de elemente al mulțimii A este $\boxed{5}$.

Observație privind contestațiile: Expresia (x, y) poate desemna atât o pereche ordonată, cât și *cel mai mare divizor comun* al numerelor x și y . Astfel, enunțul poate fi interpretat

și astfel: mulțimea A este formată din valorile *celui mai mare divizor comun* pentru care există $x, y \in \mathbb{N}^*$ care satisfac relația din enunț. Din soluțiile obținute mai sus rezultă că valorile posibile sunt 1, 2, 13, deci în această interpretare cardinalul este 3, corespunzător variantei **d**). În urma contestațiilor, se acceptă ca răspuns corect și varianta **d**).

Răspuns corect: c),d), 5p

□

Problema 12

Suma numerelor prime p și q pentru care $p + q = 8p^2 - q^2$ este egală cu:

a) 13

b) 5

c) 7

d) 24

Demonstrație. $p + q = 8p^2 - q^2 \iff q^2 + q = 8p^2 - p \iff q(q + 1) = 8p^2 - p$. Cum $q(q + 1) : 2 \implies 8p^2 - p : 2$. Dar $8p^2 : 2 \implies p : 2$, p prim $\implies p = 2$ și $q(q + 1) = 30 \implies q = 5$. Suma numerelor p și q este egală cu 7.

Răspuns corect: c), 5p

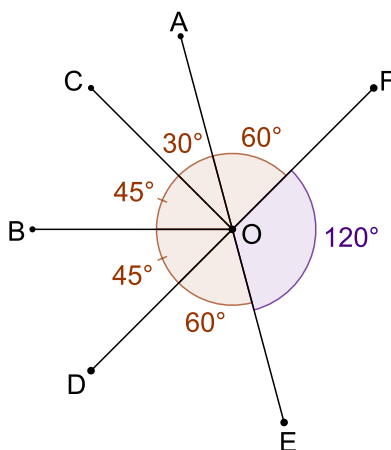
□

Problema 13

În interiorul unghiului $\angle AOB$ cu măsura de 75° este inclusă semidreapta $(OC$. Dacă măsura unghiului $\angle AOC$ este egală cu 30° , semidreapta $(OB$ este bisectoarea unghiului $\angle COD$, $(OE$ este semidreapta opusă semidreptei $(OA$ și $(OF$ este semidreapta opusă semidreptei $(OD$, atunci măsura unghiului $\angle EOF$ este egală cu:

a) 90° b) 115° c) 60° d) 120°

Demonstrație.



Calculăm pentru început măsura unghiului $\angle BOC$.

$$\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$

Deoarece $(OB$ este bisectoarea unghiului $\angle COD \implies \angle BOD = 45^\circ$. Cum $(OE$ și $(OA$ sunt semidrepte opuse rezultă că $\angle AOE = 180^\circ$ de unde obținem:

$$\angle DOE = \angle AOE - \angle AOB - \angle BOD = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

Cum $(OD$ și $(OF$ sunt semidrepte opuse rezultă că $\angle DOF = 180^\circ$ de unde obținem:

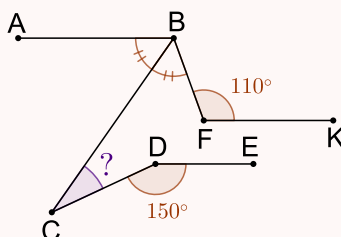
$$\angle EOF = \angle DOF - \angle DOE = 180^\circ - 60^\circ = \boxed{120^\circ}.$$

Răspuns corect: d) 5p

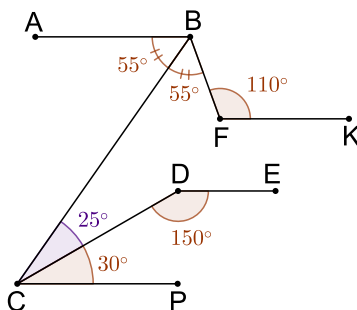
□

Problema 14

În figura următoare au loc următoarele proprietăți: $AB \parallel FK \parallel DE$, semidreapta $(BC$ este bisectoarea unghiului $\angle ABF$, $\angle BFK = 110^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$. Să se determine măsura unghiului $\angle BCD$.

a) 15° b) 20° c) 25° d) 30°

Demonstrație. Construim prin punctul C paralela CP la dreapta DE , astfel încât punctele P și D se află în același semiplan față de dreapta BC .



Facem următoarele observații:

- $FK \parallel AB \implies \angle ABF \equiv \angle BFK = 110^\circ$;
- $(BC$ este bisectoarea unghiului $\angle ABF \implies \angle ABC \equiv \angle CBF = 55^\circ$;
- $AB \parallel CP \implies \angle ABC \equiv \angle PCB$ ca unghiuri alterne interne, deci $\angle PCB = 55^\circ$;
- $DE \parallel CP \implies \angle PCD + \angle CDE = 180^\circ$ ca unghiuri interne de aceeași parte a secantei, deci $\angle PCD = 30^\circ$.

Măsura unghiului $\angle BCD$ este egală cu $\angle BCP - \angle DCP = 55^\circ - 30^\circ = \boxed{25^\circ}$.

Răspuns corect: c) 5p

□

Problema 15

Numerele naturale prime a și b au proprietatea că numărul $a \cdot b \cdot (5 \cdot a + 6 \cdot b)$ este pătrat perfect. Care este cea mai mare valoare a sumei $a^2 + b^2$?

a) 29

b) 484

c) 242

d) 363

Demonstrație. Distingem două situații:

- Dacă $a = b$, atunci $a^2 \cdot 11a$ pătrat perfect $\implies a = b = 11 \implies a \cdot b \cdot (5a + 6b) = 11^4 = (11^2)^2$, care este pătrat perfect;
- Cazul $a \neq b$ cu a, b numere prime $\implies (a, b) = 1$ și $a \cdot b \cdot (5a + 6b)$ pătrat perfect $\implies$

$$\begin{cases} a \mid 5a + 6b \\ a \mid 5a \end{cases} \implies \begin{cases} a \mid 6b \\ (a, b) = 1 \end{cases} \implies a \mid 6 \implies a \in \{2, 3\}.$$

$$\begin{cases} b \mid 5a + 6b \\ b \mid 6b \end{cases} \implies \begin{cases} b \mid 5a \\ (a, b) = 1 \end{cases} \implies b \mid 5 \implies b = 5.$$

- În cazul $a = 2$ și $b = 5 \implies a \cdot b \cdot (5 \cdot a + 6 \cdot b) = 10 \cdot (10 + 30) = 400 = 20^2$, care este pătrat perfect.

- În cazul $a = 3$ și $b = 5 \implies a \cdot b \cdot (5a + 6b) = 15 \cdot (15 + 30) = 15 \cdot 45$, iar acest număr nu este pătrat perfect.

Soluțiile sunt $(a, b) \in \{(11, 11), (2, 5)\}$, iar cea mai mare valoare a sumei $a^2 + b^2$ este egală cu $11^2 + 11^2 = \boxed{242}$.

Răspuns corect: c 5p

□

Problema 16

Dacă $\frac{\overline{3a}}{\overline{4bc}}$ este cea mai mică fracție cu proprietatea că $\overline{3a}$ este număr prim, iar $\overline{4bc}$ este număr natural divizibil cu 36, atunci suma $a + b + c$ este egală cu:

a) 6

b) 21

c) 12

d) 15

Demonstrație.

- Numerele prime de forma $\overline{3a}$ sunt 31 și 37. Ca fracția să fie cât mai mică este necesar ca numărătorul să fie cel mai mic posibil, deci $\overline{3a} = 31$, adică $a = 1$.
- $\overline{4bc} = 400 + \overline{bc} = 36 \cdot 11 + 4 + \overline{bc}$, deci $\overline{4bc} : 36 \iff 36 \cdot 11 + 4 + \overline{bc} : 36 \iff 4 + \overline{bc} : 36 \iff \overline{bc} = \mathcal{M}_{36} + 32 \iff \overline{bc} \in \{32, 68\}$. Ca fracția să fie cea mai mică, este necesar ca numitorul să fie cât mai mare, adică $\overline{bc} = 68$.

Cea mai mică fracție care îndeplinește condițiile din ipoteză este $\frac{31}{468}$, iar suma $a + b + c$ este egală cu $1 + 6 + 8 = \boxed{15}$.

Răspuns corect: d 5p

□

Problemele 1-16:		$16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu:		$20p$
Total:		$100p$
Timp de lucru:		2 ore