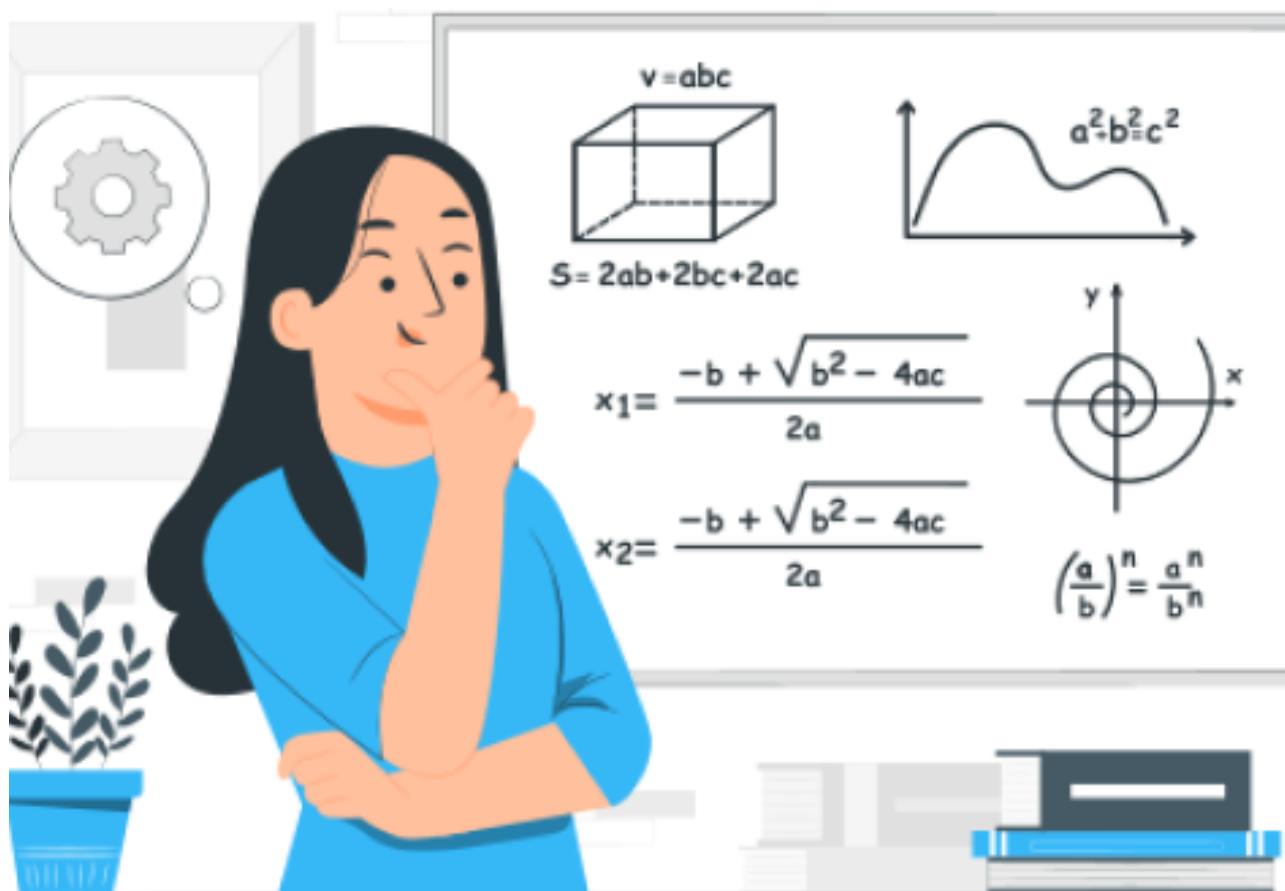




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa I
Clasa a VII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

În pătratul $ABCD$ punctele P , Q și R sunt mijloacele laturilor (DA) , (BC) , respectiv (CD) . Vom nota $AQ \cap BP = \{M\}$. Care este raportul dintre aria patrulaterului concav $ARBM$ și aria pătratului $ABCD$?

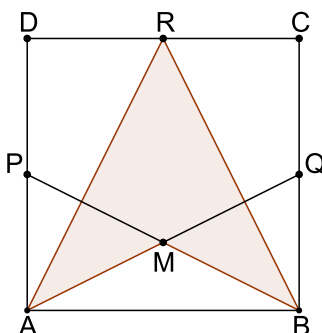
a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{7}{16}$

d) $\frac{3}{8}$

Demonstrație. Rezultatul principal pe care îl vom folosi este că mediana împarte triunghiul în două suprafețe de arie egală.



Vom nota cu l latura pătratului, iar aria patrulaterului concav $ARBM$ o vom exprima astfel:

$$\mathcal{A}_{ARBM} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADR} - \mathcal{A}_{BCR} - \mathcal{A}_{ABM}.$$

- Cum AR este mediană în $\triangle ADC \Rightarrow \mathcal{A}_{ADR} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{l^2}{4}$.
- Raționând similar, obținem $\mathcal{A}_{BCR} = \frac{l^2}{4}$.
- $ABQP$ este paralelogram pentru că $AP = BQ$ și $AP \parallel BQ$, deci M este mijlocul diagonalelor AQ și BP .
- $\mathcal{A}_{ABP} = \frac{l^2}{4}$ pentru că $\triangle ABP \equiv \triangle DAR$, iar AM este mediană în $\triangle ABP$, deci $\mathcal{A}_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABP} = \frac{l^2}{8}$.

În final obținem $\mathcal{A}_{ARBM} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{ADR} - \mathcal{A}_{BCR} - \mathcal{A}_{ABM} = l^2 - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{8} = \frac{3l^2}{8}$.

Raportul dintre aria patrulaterului concav $ARBM$ și aria pătratului $ABCD$ este egal cu:

$$\frac{\mathcal{A}_{ARBM}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{\frac{3l^2}{8}}{l^2} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

Răspuns corect: d) 5p

□

Problema 2

Fie $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2025}}$ și $A = \frac{4x}{\sqrt{5} + 1} + 1$. Afirmatia corectă este:

- a) A este pătratul unui număr natural b) $5A$ este cubul unui număr natural
c) $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ d) $A \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Demonstrație.

$$\begin{aligned} x &= 1 + \sqrt{5} + 5 + 5 \cdot \sqrt{5} + 5^2 + 5^2 \cdot \sqrt{5} \dots + 5^{1012} \cdot \sqrt{5} = \\ &= (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{1012}) + (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{1012}) \cdot \sqrt{5} = \\ &= (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{1012}) (\sqrt{5} + 1) \end{aligned}$$

Vom calcula suma $S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{1012}$.

$$S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{1012} \quad (1)$$

$$5 \cdot S = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 \dots + 5^{1013} \quad (2)$$

Scădem relațiile (1) și (2) și obținem $4S = 5^{1013} - 1 \iff S = \frac{5^{1013} - 1}{4}$. Înlocuind pe x în A avem

$$A = \frac{4 \cdot \frac{(5^{1013} - 1)(\sqrt{5} + 1)}{4}}{\sqrt{5} + 1} + 1 = \frac{(5^{1013} - 1)(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5} + 1} + 1 = 5^{1013} - 1 + 1 = 5^{1013}.$$

Numărul A este număr întreg, deci afirmațiile de la punctele c) și d) sunt false. Afirmatia de la punctul a) este falsă, de asemenea, deoarece 5 este număr prim, iar exponentul lui este număr impar. Însă afirmația de la punctul b) este corectă pentru că $5A = 5^{1014} = (5^{338})^3$, adică $5A$ este cubul unui număr natural.

Răspuns corect: b 5p

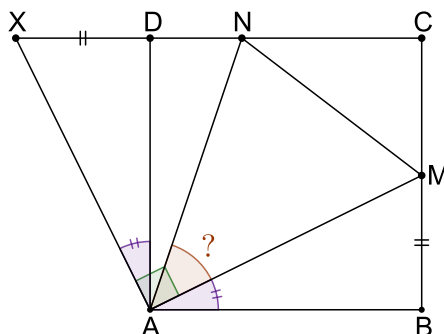
□

Problema 3

Fie pătratul $ABCD$ și punctele $N \in (DC)$, $M \in (BC)$. Dacă $BM = 3$ cm, $DN = 2$ cm, $MN = 5$ cm, aflați măsura unghiului $\angle NAM$.

- a) 45° b) 30° c) 60° d) 55°

Demonstrație. Construim $X \in DC$ astfel încât $D \in (XC)$ și $DX = MB = 3$ cm. Prin urmare $XN = XD + DN = MB + DN = 5 = MN$.



$$\begin{cases} AD = AB \\ DX = BM \\ \angle ADX \equiv \angle ABM \end{cases} \implies \triangle ADX \equiv \triangle ABM \implies AX = AM \text{ și } \angle XAD \equiv \angle MAB. \text{ Din}$$
 ultima congruență rezultă și că $\angle MAX = \angle MAD + \angle XAD = \angle MAD + \angle MAB = 90^\circ$.

$$\begin{cases} AN \text{ latură comună} \\ XN = MN = 5 \text{ cm} \\ AX = AM \end{cases} \implies \triangle XAN \equiv \triangle MAN \implies \angle XAN \equiv \angle MAN.$$

Atunci, $\angle NAM = \frac{\angle XAM}{2} = \frac{90^\circ}{2} = \boxed{45^\circ}$.

Răspuns corect: a) 5p

□

Problema 4

Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB = 5 \text{ cm}$, $CD = 3 \text{ cm}$ și $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $MN \parallel AB$. Știind că trapezele $ABNM$ și $MNCD$ au aceeași arie, aflați lungimea segmentului MN .

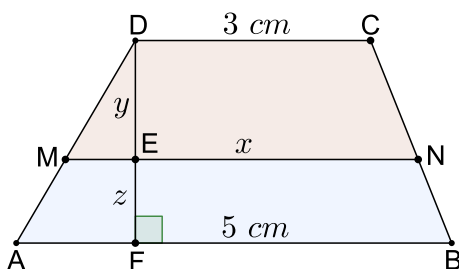
a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{13}$

Demonstrație. Vom nota $DF \perp AB$, $F \in AB$, $DF \cap MN = \{E\}$.



În plus, notăm $MN = x$, $DE = y$, și $EF = z$. Obținem

$$A_{ABNM} = A_{DCNM} \iff \frac{z(x+5)}{2} = \frac{y(x+3)}{2} \iff \frac{y}{z} = \frac{x+5}{x+3}. \quad (1)$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} A_{ABNM} &= \frac{A_{ABCD}}{2} \iff \frac{z(x+5)}{2} = \frac{8(y+z)}{4} \iff \\ z(x+5) &= 4(y+z) \iff \frac{x+5}{4} = \frac{y+z}{z} \iff \frac{x+1}{4} = \frac{y}{z}. \quad (2) \end{aligned}$$

Din (1) și (2) obținem că

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{4} &= \frac{x+5}{x+3} \iff (x+1)(x+3) = 4(x+5) \iff \\ x^2 + 4x + 3 &= 4x + 20 \iff x^2 = 17 \iff x = \pm\sqrt{17}. \end{aligned}$$

Dar $x > 0$, deci lungimea lui MN este egală cu $\boxed{\sqrt{17}}$.

Răspuns corect: b) 5p

□

Problema 5

Determinați numărul soluțiilor întregi ale ecuației

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1013}} + \frac{1}{\sqrt{2026 - x} + \sqrt{1013}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2026 - x}}.$$

a) 0

b) 2026

c) 2027

d) 1013

Demonstrație. Din condiția de existență a radicalului obținem $x \geq 0$ și $2026 - x \geq 0 \iff x \leq 2026$, $x \in \mathbb{Z}$, deci $x \in \{0, 1, 2, \dots, 2026\}$. Pentru $x \neq 1013$ vom raționaliza fracțiile amplificând fiecare fracție cu conjugatul numitorului. Este necesar ca $x \neq 1013$ pentru că fiecare numitor devine $x - 1013$ și acesta trebuie să fie diferit de 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1013}} + \frac{1}{\sqrt{2026 - x} + \sqrt{1013}} &= \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2026 - x}} \iff \\ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1013}}{(\sqrt{x} - \sqrt{1013})(\sqrt{x} + \sqrt{1013})} + \frac{\sqrt{2026 - x} - \sqrt{1013}}{(\sqrt{2026 - x} - \sqrt{1013})(\sqrt{2026 - x} + \sqrt{1013})} &= \\ = \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{2026 - x})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2026 - x})(\sqrt{x} + \sqrt{2026 - x})} &\iff \\ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1013}}{x - 1013} + \frac{\sqrt{1013} - \sqrt{2026 - x}}{x - 1013} &= \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{2026 - x})}{2x - 2026} \iff \\ \sqrt{x} - \sqrt{1013} + \sqrt{1013} - \sqrt{2026 - x} &= \sqrt{x} - \sqrt{2026 - x} \iff 0 = 0, \end{aligned}$$

relație adevărată pentru orice număr care respectă condițiile de existență pentru radical și condițiile de existență pentru numitor, adică $x \in \{0, 1, 2, \dots, 1012, 1014, \dots, 2026\}$. Pentru $x = 1013$ înlocuim direct în ecuația inițială și observăm cu ușurință că și acest număr este soluție, prin urmare, valorile întregi sunt $x \in \{0, 1, 2, \dots, 2026\}$. Numărul de soluții întregi ale ecuației este 2027.

Răspuns corect: c) 5p

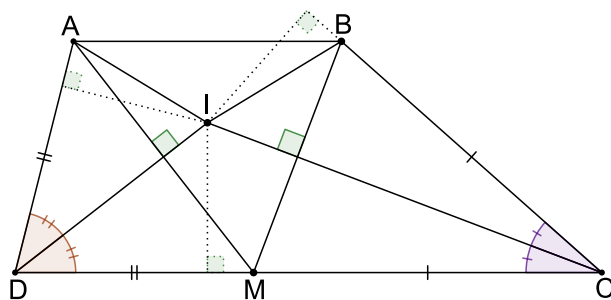
□

Problema 6

Fie $ABCD$ un trapez neisoscel cu baza mică AB , iar I este punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor $\angle ADC$ și $\angle BCD$. Vom nota cu $\mathcal{A}_{BIC}$ aria triunghiului $\triangle BIC$. Știind că $AD + BC = DC$, aflați care este afirmația corectă:

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) I se află pe mediatoarea lui (AB) | b) $\frac{IA}{IB} = \frac{2}{3}$ |
| c) $\mathcal{A}_{AID} = \mathcal{A}_{BIC}$ | d) $ID = IC$ |

Demonstrație. Vom considera punctul M pe latura DC , astfel încât $DM = AD$, deci și $MC = BC$. Am "spart" segmentul (DC) în două segmente congruente cu AD , respectiv BC .



- Triunghiurile $\triangle DAM$ și $\triangle CBM$ sunt isoscele, DI și CI sunt bisectoare, deci și mediatoarele segmentelor AM , respectiv BM . Prin urmare, punctul I este centrul cercului circumscris triunghiului $\triangle MAB$, deci punctul I se află pe mediatoarea lui (AB) . De aici rezultă imediat că $IA = IB$, deci $\frac{IA}{IB} = 1$, adică afirmația de la punctul b) este falsă.
- Dacă $\mathcal{A}_{AID} = \mathcal{A}_{BIC}$, atunci $\frac{AD \cdot d(I, AD)}{2} = \frac{BC \cdot d(I, BC)}{2}$. Dar $d(I, AD) = d(I, DC) = d(I, BC)$ pentru că punctul I se află pe bisectoarele celor două unghiuri și orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului. De aici rezultă că $AD = BC$, adică trapezul $ABCD$ este isoscel, contradicție cu ipoteza.
- Dacă afirmația de la punctul d) ar fi adevărată, atunci I s-ar afla și pe mediatoarea lui DC , adică AB și CD ar avea aceeași mediatoare, ori asta se întâmplă doar în cazul în care trapezul este isoscel.

Așadar, singura afirmație corectă este I se află pe mediatoarea lui (AB) .

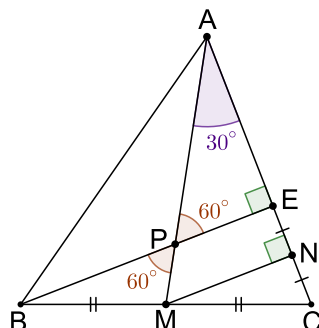
Răspuns corect: a) 5p □

Problema 7

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$, mediana AM este congruentă cu înălțimea BE , unde $M \in BC$ și $E \in AC$. Fie $\{P\} = AM \cap BE$. Determinați măsura unghiului $\angle BPM$.

- a) 75° b) 60° c) 45° d) 30°

Demonstrație.



Fie N mijlocul segmentului (EC) . Atunci MN este linie mijlocie în $\triangle BCE \Rightarrow MN \parallel BE$ și $MN = \frac{BE}{2}$. Dar $BE \perp AC \Rightarrow MN \perp AC$, adică triunghiul $\triangle AMN$ este dreptunghic în N .

În plus, deoarece $BE = AM$, obținem $MN = \frac{AM}{2}$, deci, conform reciprocei teoremei unghiului de 30° rezultă că $\angle MAN = 30^\circ$. În $\triangle APE$, dreptunghic în E obținem că $\angle APE = 60^\circ$, $\angle APE \equiv \angle BPM$ fiind unghiuri opuse la vârf, deci $\angle BPM = \boxed{60^\circ}$.

Răspuns corect: b) 5p

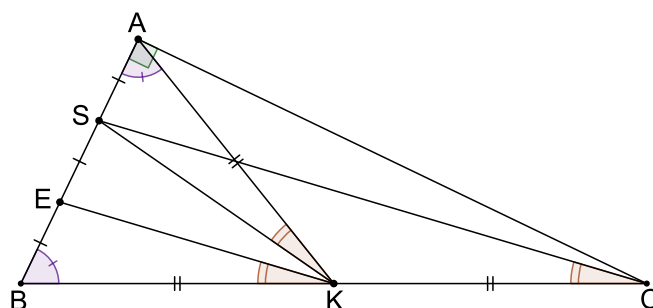
□

Problema 8

Fie $\triangle ABC$ cu $\angle A = 90^\circ$, punctul $K \in (BC)$, astfel încât $BK = KC$ și $S \in (AB)$, astfel încât $BS = 2SA$. Dacă $\angle AKS = 15^\circ$, să se determine măsura unghiului $\angle SCB$.

- a) 15° b) $7^\circ 30'$ c) $\frac{15^\circ}{4}$ d) 30°

Demonstrație.



Fie $E \in (AB)$ astfel încât $EB = \frac{AB}{3} \Rightarrow AS = SE = EB$. În plus, AK este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $AK = KB \Rightarrow \triangle AKB$ este isoscel $\Rightarrow \angle KAS \equiv \angle KBE$.

$$\begin{cases} AK = BK = \frac{BC}{2} \\ AS = BE. \\ \angle KAS = \angle KBE \end{cases} \Rightarrow \triangle AKS \equiv \triangle BKE, \text{ deci } \angle AKS = \angle EKB = 15^\circ.$$

În $\triangle ASB$, KE este linie mijlocie, deci $SC \parallel EK \Rightarrow \angle SCB = \angle EKB = \angle AKS = 15^\circ$.

Răspuns corect: a) 5p

□

Problema 9

Dacă $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2025$, atunci rădăcina pătrată a lui a este egală cu:

- a) 1013 b) $1012 \cdot 1013$ c) 2025 d) $2 \cdot 1013$

Demonstrație. De la 1 la 2026 sunt 2026 numere naturale, jumătate pare, jumătate impare. Așadar, în sumă sunt 1013 termeni.

$$a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2025 = \frac{1013 \cdot (1 + 2025)}{2} = 1013^2. \text{ Rădăcina pătrată a lui } a \text{ este } 1013$$

Răspuns corect: a) 5p

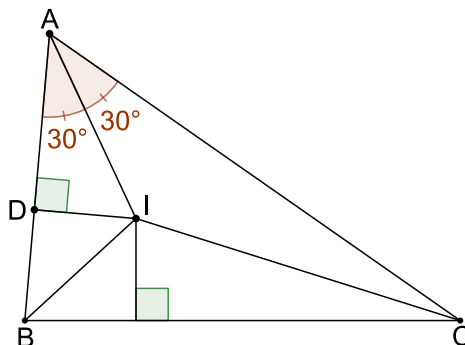
□

Problema 10

Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu $\angle BAC = 60^\circ$ și $AI = 4\sqrt{2}$ cm, unde I este punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului. Distanța de la I la dreapta BC este egală cu:

- a) $2\sqrt{2}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm c) $3\sqrt{3}$ cm d) 2 cm

Demonstrație.



Punctul I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, deci $d(I, BC) = d(I, AB)$. Fie $ID \perp AB$. Cum (AI este bisectoare rezultă că $\angle DAI = 30^\circ \Rightarrow ID = \frac{AI}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Distanța de la I la BC este egală cu $2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Răspuns corect: a) 5p

□

Problema 11

Cel mai mic produs a 3 numere distincte din mulțimea $\{-8, -6, -1, 0, 3, 7\}$ este egal cu:

a) -336

b) 0

c) -168

d) -48

Demonstrație. Pentru a găsi cel mai mic produs a 3 numere distincte din mulțimea A trebuie să selectăm 3 numere negative sau unul negativ și două pozitive. În prima situație avem o singură opțiune, dar rezultatul calculului $(-8) \cdot (-7) \cdot (-1) = -56$ nu este cel mai mic pe care îl putem găsi. În al doilea caz alegem numerele care au cea mai mare valoare absolută și obținem că cel mai mic produs este $(-8) \cdot 3 \cdot 7 = -168$.

Răspuns corect: c) 5p

□

Problema 12

Soluția reală a ecuației

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} = 14(x-4)$$

este egală cu:

a) 7

b) -8

c) 4

d) 8

Demonstrație. Știm că $\sqrt{x} \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}_+$, atunci,

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} \geq 0 \iff$$

$$14(x-4) \geq 0 \iff x \geq 4 \implies \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = x-3.$$

Analog și pentru ceilalți radicali și ecuația devine:

$$x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3=14(x-4) \iff$$

$$7x = 14x - 56 \iff$$

$$7x = 56 \iff$$

$$x = \boxed{8}.$$

Răspuns corect: ☐ d) 5p

☐

Problema 13

Numărul perechilor de numere întregi (x, y) , care sunt soluții ale ecuației

$$\frac{x^2 + 1}{5} = 1 + \frac{53}{y^2 + 4}$$

este egal cu:

a) 2

b) 4

c) 8

d) 16

Demonstrație. $\frac{x^2 + 1}{5} = 1 + \frac{53}{y^2 + 4} \iff \frac{x^2 + 1}{5} - 1 = \frac{53}{y^2 + 4} \iff \frac{x^2 - 4}{5} = \frac{53}{y^2 + 4} \iff (x^2 - 4)(y^2 + 4) = 5 \cdot 53 \implies x^2 - 4 \in \{1, 5, 53, 265\}$. Divizorii negativi sunt excluși pentru că $y^2 + 4 > 0$, deci și $x^2 - 4 > 0$. Analizând cele 4 cazuri obținem soluții doar pentru $x^2 - 4 = 5 \iff x \in \{-3, 3\}$ și $y^2 + 4 = 53 \iff y \in \{-7, 7\} \implies (x, y) \in \{(-3, -7), (-3, 7), (3, -7), (3, 7)\}$. Numărul perechilor (x, y) care sunt soluții ale ecuației este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: ☐ b) 5p

☐

Problema 14

Cifra a și numărul natural b sunt soluțiile ecuației

$$3a + b = \sqrt{aa5}.$$

Care este valoarea sumei $a + b$?

a) 15

b) 23

c) 11

d) 12

Demonstrație. $3a + b = \sqrt{aa5} \iff (3a + b)^2 = aa5 \implies aa5$ este pătrat perfect, deci $aa5 = 225$, acesta fiind singurul pătrat perfect de 3 cifre care are ultima cifră 5 și primele două cifre egale. Pentru a obține un pătrat perfect cu ultima cifră 5 trebuie să ridicăm la pătrat un număr care are ultima cifră tot 5, $25^2 = 625$, deci nu corespunde, iar pentru numere mai mari sau egale cu 35, pătratul acestora are mai mult de 3 cifre. Ecuația devine $3 \cdot 2 + b = 15 \iff b = 9$. Valoarea sumei $a + b$ este egală cu $\boxed{11}$.

Răspuns corect: ☐ c) 5p

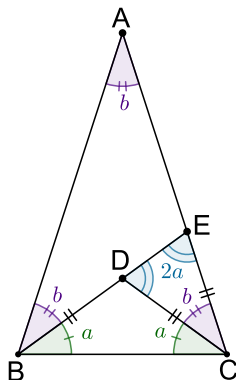
☐

Problema 15

În interiorul triunghiului isoscel $\triangle ABC$, cu $AB = AC$ se consideră punctul D , astfel încât $DB = DC$. Notăm $BD \cap AC = \{E\}$. Știind că $CD = CE$ și $BE = AE$, determinați măsura unghiului $\angle BAC$.

a) 45° b) 18° c) 30° d) 36°

Demonstrație.



Vom exprima unghiurile care apar pe desen în funcție de $a = \angle DBC = \angle DCB$, ca unghiuri de la baza unui triunghi isoscel și $b = \angle ABD$. Cum $AB = AC \implies \angle ABC = \angle ACB \implies \angle ACD = \angle ABD = b$.

- În triunghiul isoscel $\triangle CDE$ cu $CD = CE$, avem $\angle DEC = \angle EDC = \angle DBC + \angle DCB = 2a$, ca unghi exterior triunghiului $\triangle DBC$.
- În triunghiul isoscel $\triangle EAB$ cu $EA = EB$, avem $\angle BAE = \angle ABE = b$ și $\angle BEC = \angle BAE + \angle ABE = 2b$, ca unghi exterior triunghiului $\triangle AEB$, deci $2a = 2b \iff a = b$.
- În $\triangle ABC$ suma măsurilor unghiurilor este de $180^\circ \implies 5a = 180^\circ \iff a = 36^\circ$.

Măsura unghiului $\angle BAC$ este $\boxed{36^\circ}$.

Răspuns corect: d 5p

□

Problema 16

Mihai joacă un joc în care poate schimba jetoane după următoarele reguli:

- dă 1 jeton alb și primește în schimb 4 jetoane roșii;
- dă 1 jeton roșu și primește în schimb 3 jetoane albe.

Mihai a avut la început 4 jetoane albe. După exact 11 schimburi are 31 de jetoane în total. Câte dintre acestea sunt roșii?

a) 21

b) 14

c) 12

d) 18

Demonstrație. Vom nota cu x numărul de schimburi în care Mihai dă un jeton alb în schimbul a 4 jetoane roșii și cu y numărul de runde în care a dat un jeton roșu pentru 3 jetoane albe.

Vom avea de rezolvat sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 4 - x + 4x - y + 3y = 31 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 11 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 11 \\ x + 2(x + y) = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 11 \\ x + 22 = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

În cele 5 schimburi în care a dat un jeton alb a primit $5 \cdot 4 = 20$ jetoane roșii, iar în restul rundelor a dat 6 dintre acestea. Numărul de jetoane roșii pe care le are la final este 14.

Răspuns corect: b) 5p

□

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: 20p

Total: 100p

Timp de lucru: 2 ore