



Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a V-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu,
Adrian Bud

§1 Soluții

Problema 1

Numărul 2026 se află pe linia a și coloana b . Care este valoarea sumei $a + b$?

	Coloana 1	Coloana 2	Coloana 3	Coloana 4	Coloana 5
Linia 1	2	4	6	8	10
Linia 2	12	14	16	18	20
Linia 3	22	24	26	28	30
...

Demonstrație. Observăm că tabelul este format din numere pare, puse câte 5 pe fiecare linie.

- Linia 1: 2, 4, 6, 8, 10
- Linia 2: 12, 14, 16, 18, 20
- Linia 3: 22, 24, 26, 28, 30

Observăm că pe linia a , primul număr este

$$10 \cdot (a - 1) + 2,$$

iar ultimul este

$$10 \cdot (a - 1) + 10.$$

Numărul 2026 se află pe linia a dacă:

$$10 \cdot (a - 1) + 2 \leq 2026 \leq 10 \cdot (a - 1) + 10.$$

Scădem 2 din toate părțile:

$$10 \cdot (a - 1) \leq 2024 \leq 10 \cdot (a - 1) + 8 \iff$$

$$2010 < 2016 \leq 10 \cdot (a - 1) \leq 2024$$

Împărțim la 10 și pentru că a este un număr natural obținem:

$$a - 1 = 202 \iff a = 203.$$

Deci numărul 2026 se află pe linia $a = 203$. Pe această linie, numerele sunt:

$$2022, 2024, 2026, 2028, 2030.$$

Le așezăm pe coloane:

Coloana	1	2	3	4	5
Numărul	2022	2024	2026	2028	2030

Observăm că numărul 2026 se află pe coloana $b = 3$. Prin urmare,

$$a + b = 203 + 3 = \boxed{206}.$$

Răspuns corect: $\boxed{206}$ 5p

□

Problema 2

O carte conține 30 de povești, fiecare are un număr diferit de pagini și începe pe o pagină nouă. Numărul de pagini ale poveștilor este de 1, 2, 3, ..., 30 pagini, câte una din fiecare și nu neapărat în această ordine. Prima poveste începe pe pagina cu numărul 1. Care este numărul maxim de povești care pot începe pe o pagină cu număr impar?

Demonstrație. Observăm că doar paritatea lungimilor contează. Dacă o poveste are lungime pară, atunci paritatea paginii de start a următoarei povești rămâne aceeași. Dacă o poveste are lungime impară, atunci paritatea paginii de start a următoarei povești se schimbă.

Avem exact 15 povești de lungime impară și 15 povești de lungime pară (în mulțimea 1, 2, ..., 30).

Prima poveste începe pe pagina 1, deci pe o pagină impară. Când parcurgem poveștile, de fiecare dată când întâlnim o lungime impară, paritatea paginii de start se inversează. Așadar, paginile de start vor avea paritate: impar, (după prima lungime impară) par, (după a doua lungime impară) iar impar, etc.

Prin urmare, dintre cele 15 povești cu lungime impară, exact cele aflate pe pozițiile 1, 3, 5, ..., 15 (în ordinea apariției lor) vor începe pe pagină impară. Sunt 8 astfel de povești.

Poveștile cu lungime pară nu schimbă paritatea, deci putem alege să le plasăm *toate* în intervalele în care pagina de start este impară. Astfel, toate cele 15 povești cu lungime pară pot începe pe pagini impare.

Deci numărul maxim de povești care pot începe pe pagini impare este

$$15 + 8 = \boxed{23}.$$

Răspuns corect: $\boxed{23}$ 5p

□

Problema 3

Unele numere naturale de trei cifre au următoarea proprietate: dacă eliminăm prima cifră a numărului, obținem un pătrat perfect; dacă eliminăm ultima cifră a numărului, obținem de asemenea un pătrat perfect. Care este suma tuturor numerelor de trei cifre cu această proprietate?

Demonstrație. Notăm numărul de trei cifre sub forma \overline{abc} , unde $a \neq 0$. Atunci:

- eliminând prima cifră obținem \overline{bc} , care trebuie să fie un pătrat perfect de două cifre;
- eliminând ultima cifră obținem \overline{ab} , care trebuie să fie, de asemenea, un pătrat perfect de două cifre.

Pătratele perfecte de două cifre sunt:

$$16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Le scriem sub forma perechilor de cifre:

$$16 = (1, 6), \quad 25 = (2, 5), \quad 36 = (3, 6), \quad 49 = (4, 9), \quad 64 = (6, 4), \quad 81 = (8, 1).$$

Condiția problemei impune ca cifra b :

- să fie cifra unităților lui \overline{ab} ;
- să fie cifra zecilor lui \overline{bc} .

Verificăm cazurile posibile pentru \overline{ab} :

- $\overline{ab} = 16 \implies b = 6$. Singurul pătrat cu cifra zecilor 6 este 64, deci $c = 4$. Numărul este 164.
- $\overline{ab} = 36 \implies b = 6$. Din nou $\overline{bc} = 64$, deci $c = 4$. Numărul este 364.
- $\overline{ab} = 64 \implies b = 4$. Singurul pătrat cu cifra zecilor 4 este 49, deci $c = 9$. Numărul este 649.
- $\overline{ab} = 81 \implies b = 1$. Singurul pătrat cu cifra zecilor 1 este 16, deci $c = 6$. Numărul este 816.

Celelalte pătrate (25 și 49) nu duc la soluții, deoarece nu există pătrate perfecte cu cifrele zecilor corespunzătoare lui $b = 5$ sau $b = 9$.

Prin urmare, toate numerele cerute sunt:

$$164, \quad 364, \quad 649, \quad 816.$$

Suma lor este:

$$164 + 364 + 649 + 816 = \boxed{1993}.$$

Răspuns corect: $\boxed{1993}$ 5p

Problema 4

Alexandra are ca temă o împărțire de două numere naturale. Fratele său mai mic se joacă puțin și schimbă din factorii împărțirii astfel: mărește deîmpărțitul cu 17 și împărțitorul cu 3, restul îl micșorează cu 4 iar câtul îl lasă neschimbat. La clasă profesorul corectează tema și constată că operația este corectă. Care este valoarea câtului?

Demonstrație. Aplicăm teorema împărțirii cu rest:

$$D = I \cdot C + R, \quad R < I,$$

care reprezintă operația Alexandrei. După modificări relația devine

$$D + 17 = (I + 3) \cdot C + R - 4, \quad R - 4 < I + 3,$$

sau

$$I \cdot C + R + 17 = I \cdot C + 3 \cdot C + R - 4.$$

După reduceri se obține

$$17 = 3 \cdot C - 4 \iff 21 = 3 \cdot C \iff C = \boxed{7}.$$

Răspuns corect: $\boxed{7}$ 5p

Problema 5

Care este suma numerelor naturale \overline{abcd} care au proprietatea

$$16 \cdot (a + b)^4 = \overline{abcd}?$$

Gazeta Matematică 10/2025

Demonstrație. Observăm că

$$16 \cdot (a + b)^4 = (2 \cdot (a + b))^4.$$

Notăm

$$x = 2 \cdot (a + b).$$

Atunci x este un număr par, iar

$$\overline{abcd} = x^4.$$

Căutăm numere pare x astfel încât x^4 să fie un număr de 4 cifre. Calculăm:

$$4^4 = 256 \quad (\text{are 3 cifre}),$$

$$6^4 = 1296 \quad (\text{are 4 cifre}),$$

$$8^4 = 4096 \quad (\text{are 4 cifre}),$$

$$10^4 = 10000 \quad (\text{are 5 cifre, prea mare}).$$

Deci singurele valori posibile sunt:

$$x = 6 \quad \text{și} \quad x = 8.$$

Rezultă:

$$\overline{abcd} \in \{1296, 4096\}.$$

Verificăm dacă există cifre a, b, c, d cu proprietatea cerută.

- Pentru $\overline{abcd} = 1296$:

$$x = 6 \implies 2 \cdot (a + b) = 6 \implies a + b = 3.$$

Cum $a = 1$ și $b = 2$, condiția este satisfăcută.

- Pentru $\overline{abcd} = 4096$:

$$x = 8 \implies 2 \cdot (a + b) = 8 \implies a + b = 4.$$

Cum $a = 4$ și $b = 0$, condiția este satisfăcută.

Ambele numere sunt bune, iar suma lor este:

$$1296 + 4096 = \boxed{5392}.$$

Răspuns corect: $\boxed{5392}$ 5p

□

Problema 6

George are niște bile într-o cutie. La fiecare tură, elimină jumătate din bile, adaugă 2 și apoi dublează bilele rămase. După 35 de ture, există 148 de bile în cutie. Câte bile conținea cutia la început?

Demonstrație. Fie x numărul de bile din cutie înainte de o tură. După eliminarea a jumătate din bile rămân

$$x : 2$$

bile. Apoi se adaugă 2 bile, deci sunt

$$x : 2 + 2.$$

După aceea se dublează numărul de bile, obținându-se

$$2 \cdot (x : 2 + 2) = x + 4.$$

Așadar, la fiecare tură numărul de bile crește cu 4. Se știe că după 35 de ture sunt 148 bile. Deci numărul inițial de bile a fost

$$148 - 35 \cdot 4 = 148 - 140 = \boxed{8}.$$

Răspuns corect: $\boxed{8}$ 5p

□

Problema 7

Câtul împărțirii unui număr natural de trei cifre \overline{abc} la 9 este un număr natural de trei cifre, iar restul este egal cu 0. Suma cifrelor câtului este cu 9 mai mică decât suma cifrelor numărului inițial. Determinați valoarea numărului \overline{abc} .

Demonstrație. Notăm numărul de trei cifre prin \overline{abc} și câtul împărțirii la 9 prin numărul de trei cifre \overline{xyz} . Avem

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{xyz},$$

Deoarece \overline{xyz} are trei cifre, rezultă $\overline{xyz} \geq 100$, deci

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{xyz} \geq 900,$$

așadar $a = 9$. Cum \overline{abc} are trei cifre, avem $\overline{abc} \leq 999$, deci

$$9 \cdot \overline{xyz} \leq 999 \implies \overline{xyz} \leq 111,$$

prin urmare

$$100 \leq \overline{xyz} \leq 111.$$

Un număr și suma cifrelor sale au același rest la împărțirea la 9. Din faptul că $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{xyz}$ rezultă că \overline{abc} este multiplu de 9, deci și $a + b + c$ este multiplu de 9, așadar $a + b + c \in \{9, 18, 27\}$. Cum $a = 9$, rezultă $b + c \in \{0, 9, 18\}$.

- Dacă $b + c = 0$, atunci $\overline{abc} = 900$ și

$$\overline{xyz} = 900 : 9 = 100,$$

deci $x + y + z = 1$, iar din condiție ar trebui $x + y + z = 0$, contradicție.

- Dacă $b + c = 18$, atunci $\overline{abc} = 999$ și

$$\overline{xyz} = 999 : 9 = 111,$$

deci $x + y + z = 3$, iar din condiție ar trebui $x + y + z = 18$, contradicție.

- Dacă $b + c = 9$, din condiție ar trebui $x + y + z = 9$. Cum $100 \leq \overline{xyz} \leq 111$, singurul număr din acest interval cu suma cifrelor 9 este $\overline{xyz} = 108$. Atunci

$$\overline{abc} = 9 \cdot 108 = 972,$$

iar $a + b + c = 9 + 7 + 2 = 18$ și $x + y + z = 1 + 0 + 8 = 9$, deci proprietatea este îndeplinită.

Prin urmare există un singur număr de trei cifre cu proprietatea cerută, anume $\boxed{972}$.

Răspuns corect: $\boxed{972}$ 5p

□

Problema 8

Cifrele a, b, c și d sunt consecutive în această ordine și au proprietatea că

$$\overline{ddb} \cdot \overline{bc} = \overline{bbbaa}.$$

Să se determine valoarea produsului

$$a \cdot b \cdot c \cdot d.$$

Demonstrație. Observăm mai întâi că produsul a două cifre consecutive poate avea ultima cifră doar 0, 2 sau 6. În relația

$$\overline{ddb} \cdot \overline{bc} = \overline{bbbaa},$$

ultima cifră din stânga este ultima cifră a produsului $b \cdot c$, iar ultima cifră din dreapta este a . Cum b și c sunt cifre consecutive, rezultă că

$$a \in \{0, 2, 6\}.$$

Vom analiza următoarele 2 cazuri:

- **Cazul 1: cifre consecutive crescător.** Atunci (a, b, c, d) poate fi doar una dintre mulțimile:

$$(0, 1, 2, 3), (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, 9).$$

Verificăm:

$$(0, 1, 2, 3) : \overline{ddb} \cdot \overline{bc} = 331 \cdot 12 \neq 11100 = \overline{bbbaa},$$

$$(2, 3, 4, 5) : \overline{ddb} \cdot \overline{bc} = 553 \cdot 34 \neq 33322 = \overline{bbbaa},$$

$$(6, 7, 8, 9) : \overline{ddb} \cdot \overline{bc} = 997 \cdot 78 = 77766 = \overline{bbbaa}.$$

Deci acest caz dă o soluție.

- **Cazul 2: cifre consecutive descrescător.** Singura posibilitate compatibilă cu $a \in \{0, 2, 6\}$ este

$$(a, b, c, d) = (6, 5, 4, 3),$$

iar atunci

$$\overline{ddb} \cdot \overline{bc} = 335 \cdot 54 \neq 55566 = \overline{bbbaa},$$

deci nu apare soluție.

În concluzie, singura soluție este

$$(a, b, c, d) = (6, 7, 8, 9),$$

adică

$$\overline{ddb} = 997, \quad \overline{bc} = 78, \quad \overline{bbbaa} = 77766.$$

Produsul cifrelor a, b, c și d este egal cu $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \boxed{3024}$.

Răspuns corect: $\boxed{3024}$ 5p

Problema 9

Pe o masă sunt cărți de joc pe care sunt 5 sau 7 puncte. Un elev alege la întâmplare cărți. Care este numărul **minim** de cărți pe care le poate alege pentru a acumula exact 2026 de puncte?

Demonstrație. Notăm cu a numărul de cărți cu 5 puncte și cu b numărul de cărți cu 7 puncte. Atunci

$$5 \cdot a + 7 \cdot b = 2026,$$

unde a și b sunt numere naturale. Adunăm $2 \cdot a$ în ambii membri și obținem

$$7 \cdot (a + b) = 2026 + 2 \cdot a.$$

Vrem ca $a + b$ să fie minim. Pentru asta, trebuie ca a să fie cât mai mic.

Pe de altă parte, din relație obținem:

$$7 \cdot b = 2026 - 5 \cdot a.$$

Deci $2026 - 5 \cdot a$ trebuie să fie divizibil cu 7. Scădem de fiecare dată câte 5 (adică încercăm valori mici pentru a) și vedem când restul devine 0:

a	$2026 - 5 \cdot a$	rest la împărțirea la 7
0	2026	3
1	2021	5
2	2016	0

Cea mai mică valoare care dă rest 0 este $a = 2$. Atunci:

$$7 \cdot b = 2016 \implies b = 2016 : 7 = 288.$$

Numărul minim de cărți este:

$$a + b = 2 + 288 = \boxed{290}.$$

Răspuns corect: $\boxed{290}$ 5p

Problema 10

În opt parcuri trăiesc 1001 veverițe și câteva maimuțe. În fiecare parc, numărul de veverițe este egal cu numărul total de maimuțe din toate celelalte 7 parcuri. Câte maimuțe trăiesc în total în cele opt parcuri?

- Dacă $N = 30$:

Copil	Greșeală
29	1
30	0
32	2
33	3
36	6

Apare o greșeală de 6, care nu este permisă. Nu reținem soluții în acest caz.

- Dacă $N = 33$:

Copil	Greșeală
29	4
30	3
32	1
33	0
36	3

Greșeala 3 apare de două ori, ceea ce nu este permis. Nu reținem soluții în acest caz.

- Dacă $N = 32$:

Copil	Greșeală
29	3
30	2
32	0
33	1
36	4

Apar exact o dată toate valorile: 0, 1, 2, 3, 4 așa cum cere problema.

Prin urmare, numărul corect de jucării este $\boxed{32}$.

Răspuns corect: $\boxed{32}$ 5p
□

Problema 12

Pentru câte numere de două cifre \overline{ab} are loc relația

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 132?$$

Demonstrație. Avem

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b, \quad \overline{ba} = 10 \cdot b + a.$$

Deci

$$(10 \cdot a + b) + (10 \cdot b + a) = 132$$

$$11 \cdot (a + b) = 132$$

$$a + b = 12.$$

Cu $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ și $b \in \{1, \dots, 9\}$, obținem:

$$(3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3).$$

Deci numerele sunt:

$$39, 48, 57, 66, 75, 84, 93$$

iar numărul lor este egal cu $\boxed{7}$.

Răspuns corect: 7 5p
□

Problema 13

Spunem că numărul natural a este *fratele* numărului natural b dacă $a \neq b$ și numărul a se obține prin rearanjarea cifrelor numărului b . De exemplu, 2011 este fratele lui 1210. Câți frați are numărul $10^{2026} - 2$?

Demonstrație. Calculăm mai întâi forma numărului:

$$10^{2026} = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{2026 \text{ zerouri}},$$

deci

$$10^{2026} - 2 = \underbrace{99 \dots 9}_{2025 \text{ cifre}} 8.$$

Așadar, numărul are exact:

- 2025 cifre egale cu 9;
- o cifră egală cu 8.

Orice *frate* se obține prin rearanjarea cifrelor, deci în orice *frate* apare cifra 8 o singură dată și cifra 9 de 2025 ori. Așadar, un astfel de număr este determinat doar de poziția cifrei 8 în șirul de 2026 cifre. Deoarece cifra 8 poate fi pusă în oricare dintre cele 2026 poziții, vom avea 2026 rearanjări. Una dintre aceste rearanjări este chiar numărul inițial (când 8 este ultima cifră), iar aceasta nu se numără ca *frate*. Prin urmare, numărul de *frați* este egal cu $2026 - 1 = \boxed{2025}$.

Răspuns corect: 2025 5p
□

Problema 14

Ana, Ion și Radu au scris pe nouă cartonașe numerele $1, 2, 3, \dots, 9$, le-au întors cu scrisul în jos, apoi fiecare a luat trei cartonașe și a efectuat suma și produsul numerelor de pe ele. Sumele obținute au fost 14, 15 și 16, iar produsele 54, 70 și 96. Dacă Ana a obținut produsul cel mai mare, iar Ion suma cea mai mică, care este suma pătratelor numerelor pe care le-a extras Radu?

Demonstrație. Produsul obținut de Radu poate fi 70 sau 54. Singura modalitate în care putem descompune numărul 70 în produs de trei cifre distincte din mulțimea dată este

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Suma acestora este

$$2 + 5 + 7 = 14,$$

ceea ce nu convine, căci Radu a obținut suma 15 sau 16.

Numărul 54 poate fi scris ca produs de cifre diferite în două moduri:

- $54 = 1 \cdot 6 \cdot 9$ cu $1 + 6 + 9 = 16$,
- $54 = 2 \cdot 3 \cdot 9$ cu $2 + 3 + 9 = 14$.

Cum suma nu poate fi 14, deducem că numerele lui Radu au fost 1, 6, 9.

Observăm că situația este realizabilă când Ana are numerele 3, 4, 8, iar Ion 2, 5, 7. Suma pătratelor numerelor pe care le-a extras Radu este $1^2 + 6^2 + 9^2 = \boxed{118}$.

Răspuns corect: $\boxed{118}$ 5p
□

Problema 15

Câte numere de patru cifre \overline{abcd} se pot forma astfel încât:

- cifra a să fie impară;
- cifra b să fie multiplu de 3;
- cifra c să fie diferită de a ;
- cifra d să fie mai mare decât 5?

Demonstrație. Vom analiza fiecare cifră în parte

- Cifra a trebuie să fie impară:

$$a \in \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

deci sunt 5 posibilități.

- Cifra b trebuie să fie multiplu de 3:

$$b \in \{0, 3, 6, 9\},$$

deci sunt 4 posibilități.

- Cifra c trebuie să fie diferită de a . Cum c este o cifră, poate lua inițial 10 valori, dar nu poate fi egală cu a , deci:

$$10 - 1 = 9 \text{ posibilități.}$$

- Cifra d trebuie să fie mai mare decât 5:

$$d \in \{6, 7, 8, 9\},$$

deci sunt 4 posibilități.

Prin principiul produsului, numărul total de numere este:

$$5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 = 720.$$

Prin urmare, există $\boxed{720}$ numere de patru cifre care satisfac condițiile problemei.

Răspuns corect: $\boxed{720}$ 5p
□

Problema 16

Determinați suma numerelor \overline{abc} cu proprietatea că

$$\overline{abc} = \overline{bc} \cdot c.$$

Gazeta Matematică

Demonstrație. Egalitatea dată este echivalentă cu

$$100 \cdot a + \overline{bc} = \overline{bc} \cdot c \iff 100 \cdot a = \overline{bc} \cdot (c - 1).$$

Observăm că $c > 2$ și ultima cifră a produsului $\overline{bc} \cdot (c - 1)$ trebuie să fie 0. Astfel, cifra c poate lua doar valorile 5 sau 6.

- Pentru $c = 5$ avem:

$$100 \cdot a = \overline{b5} \cdot 4 \iff 25 \cdot a = \overline{b5}.$$

Aceasta conduce la două soluții:

$$a = 1, b = 2, \overline{abc} = 125,$$

sau

$$a = 3, b = 7, \overline{abc} = 375.$$

- Pentru $c = 6$ avem:

$$100 \cdot a = \overline{b6} \cdot 5 \iff 20 \cdot a = \overline{b6}.$$

Nu reținem soluții în acest caz.

Suma celor două numere este $125 + 375 = \boxed{500}$.

Răspuns corect: $\boxed{500}$ 5p
□

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: 20p

Total: 100p

Timp de lucru: 3 ore