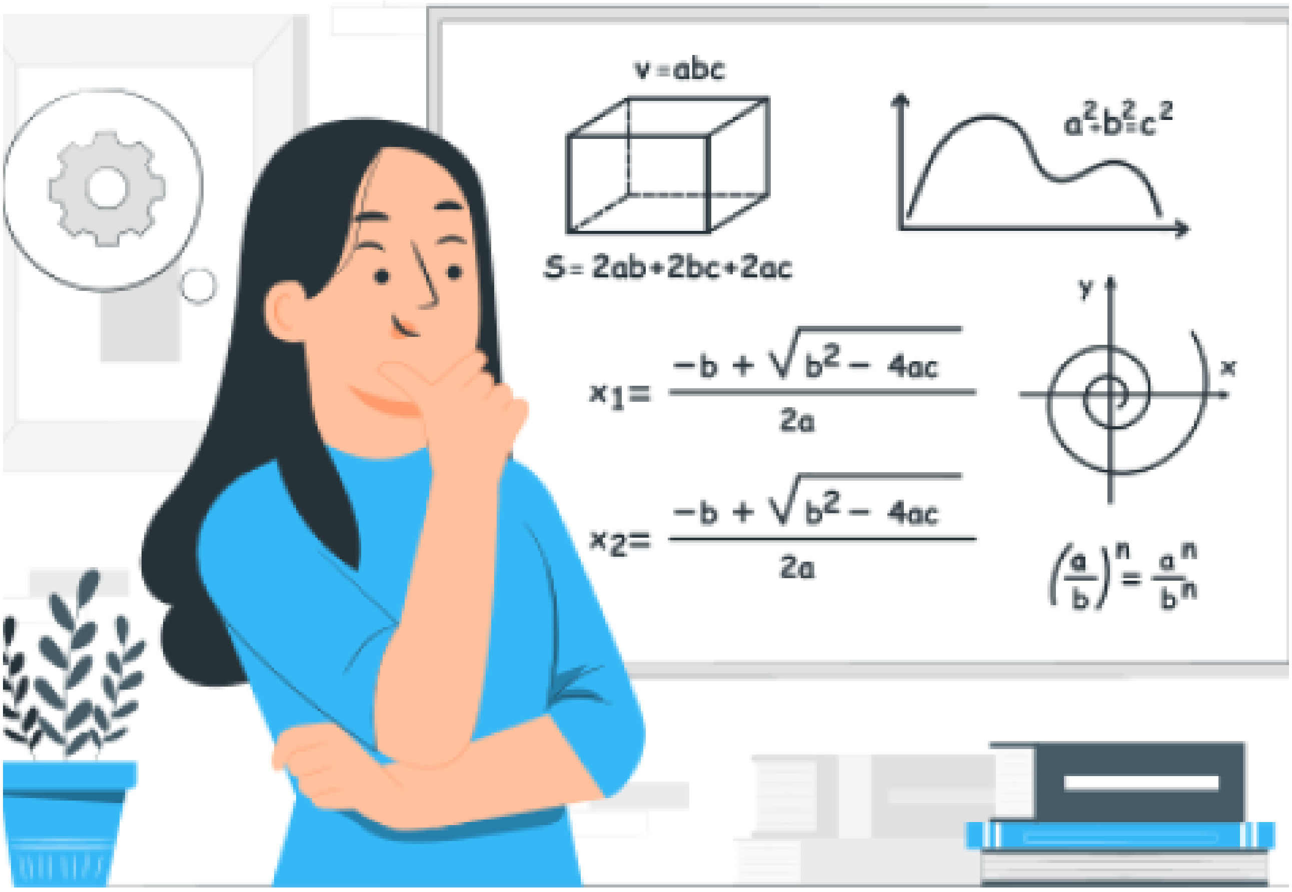


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a VI-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

§1 Soluții

Problema 1

Când telefonul lui Marius este încărcat complet, acesta se descarcă în 32 de ore dacă îl folosește doar pentru a asculta muzică, în 20 de ore dacă îl folosește doar pentru jocuri și în 80 de ore dacă nu îl folosește deloc. Marius urcă într-un tren cu telefonul pe jumătate încărcat. În timp ce se află în tren, timpul în care ascultă muzică, timpul în care se joacă pe telefon și timpul în care nu îl folosește sunt toate aceleași. Telefonul său se descarcă exact când trenul ajunge la destinație. Câte ore a durat călătoria cu trenul?

Demonstrație. Considerăm capacitatea completă a bateriei egală cu 1. Telefonul pornește cu bateria încărcată la $\frac{1}{2}$. Într-o oră, consumul de baterie este:

$$\text{muzică: } \frac{1}{32}, \qquad \text{jocuri: } \frac{1}{20}, \qquad \text{nefolosit: } \frac{1}{80}.$$

Fie t durata călătoriei cu trenul. Deoarece timpul petrecut în fiecare dintre cele trei situații este același, Marius folosește telefonul câte $\frac{t}{3}$ ore pentru fiecare tip de utilizare. Consumul total de baterie este

$$\frac{t}{3}\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}\right).$$

Calculăm suma din paranteză:

$$\frac{1}{32}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}=\frac{5}{160}+\frac{8}{160}+\frac{2}{160}=\frac{15}{160}=\frac{3}{32}.$$

Rezultă consumul total:

$$\frac{t}{3}\cdot\frac{3}{32}=\frac{t}{32}.$$

Telefonul se descarcă exact la sosirea trenului, deci consumul este egal cu încărcarea inițială:

$$\frac{t}{32}=\frac{1}{2}.$$

Prin urmare, călătoria cu trenul a durat $t=\boxed{16}$ ore.

Răspuns corect: $\boxed{16}$ .... $5p$

□

Problema 2

Fie n un număr întreg pozitiv care este multiplu de 45 și are exact 15 divizori pozitivi. Determinați valoarea maximă posibilă a lui n.

Demonstrație. Avem $45=3^2\cdot 5$. Deoarece n este multiplu de 45, rezultă că

$$n=3^a\cdot 5^b\cdot p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

unde $a\geq 2$, $b\geq 1$, iar $p_1,\ldots,p_k$ sunt numere prime diferite de 3 și 5. Numărul de divizori pozitivi ai lui n este

$$\tau(n)=(a+1)(b+1)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

Condiția $\tau(n) = 15$ impune

$$(a+1)(b+1)(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1) = 15.$$

Dar $15 = 3 \cdot 5$. Dacă ar exista un număr prim suplimentar p_i cu $\alpha_i \geq 1$, atunci am avea încă un factor $(\alpha_i + 1) \geq 2$, ceea ce ar necesita cel puțin trei factori mai mari strict decât 1 în produs. Acest lucru este imposibil deoarece 15 are în descompunere doar 2 factori strict mai mari decât 1. Prin urmare, $k = 0$, deci

$$\tau(n) = (a+1)(b+1) = 15.$$

Ținând cont că $a \geq 2$ și $b \geq 1$, obținem următoarele două posibilități:

- $(a+1, b+1) = (3,5) \implies (a,b) = (2,4) \implies n_1 = 3^2 \cdot 5^4 = 9 \cdot 625 = 5625$
- $(a+1, b+1) = (5,3) \implies (a,b) = (4,2) \implies n_2 = 3^4 \cdot 5^2 = 81 \cdot 25 = 2025$

Așadar, valoarea maximă a lui n este $\boxed{5625}$.

Răspuns corect: $\boxed{5625}$ .... $5p$

□

Problema 3

Ioan are 12 pungi cu dulciuri.

- unele pungi conțin 3 bomboane cu ciocolată, 4 caramele și o bomboană cu cireșe;
- alte pungi conțin 4 bomboane cu ciocolată, 5 caramele și 2 bomboane cu cireșe;
- restul pungilor conțin 6 bomboane cu ciocolată și 3 bomboane cu cireșe.

În total, pungile conțin 31 caramele. Câte bomboane cu cireșe conțin toate pungile?

Demonstrație. Facem următoarele notații:

- x numărul pungilor care conțin 3 bomboane cu ciocolată, 4 caramele și o bomboană cu cireșe
- y numărul pungilor care conțin 4 bomboane cu ciocolată, 5 caramele și 2 bomboane cu cireșe
- z numărul pungilor care conțin 6 bomboane cu ciocolată și 3 bomboane cu cireșe.

Atunci:

$$x + y + z = 12.$$

Numărul total de caramele este $4x + 5y$, deci:

$$4x + 5y = 31 \iff 31 - 5y = 4x.$$

Observăm că membrul drept este multiplu de 4. Pe măsură ce y variază, valorile posibile ale lui $31 - 5y$ sunt:

$$31,\ 26,\ 21,\ 16,\ 11,\ 6,\ 1.$$

Dintre acestea, singura valoare multiplu de 4 este 16. Așadar:

$$4x = 16 \implies x = 4.$$

Rezultă:

$$y = \frac{31-16}{5} = \frac{15}{5} = 3,$$

iar

$$z = 12 - (x+y) = 12 - 7 = 5.$$

În final, numărul total de bomboane cu cireșe este:

$$x + 2y + 3z = 4 + 6 + 15 = \boxed{25}$$

Răspuns corect: $\boxed{25}$ .... $5p$

□

Problema 4

Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}^*$. Numerele $x \cdot y$ și $x + y$ sunt direct proporționale cu 24 și 7, iar numerele $x \cdot z$ și $x - z$ sunt direct proporționale cu 8, respectiv 1. Numărul $\frac{y+z}{y \cdot z}$ este egal cu fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, a, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, $b \neq 0$. Determinați valoarea sumei $a + b$.

Demonstrație. Știm că

$$\frac{xy}{24} = \frac{x+y}{7} \tag{1}$$

$$\frac{xz}{8} = \frac{x-z}{1}. \tag{2}$$

Relația (1) se mai scrie

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{7}{24} \iff \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{7}{24} \tag{3}$$

iar relația (2) este echivalentă cu

$$\frac{x-z}{xz} = \frac{1}{8} \iff \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8}. \tag{4}$$

Adunând (3) cu (4) obținem

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{10}{24} \iff \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{12} = \frac{a}{b}.$$

Valoarea sumei $a + b$ este egală cu $5 + 12 = \boxed{17}$.

Răspuns corect: $\boxed{17}$ .... $5p$

□

Problema 5

Ada, Cora și Nela au jucat un joc pe calculator în care culegeau pietre prețioase: rubine, smaralde și diamante, fiecare valorând un număr de puncte. Ada are 3 rubine, 4 smaralde și 4 diamante. Cora are 5 rubine, 6 smaralde și 3 diamante. Nela are 2 rubine, 2 smaralde și 5 diamante. Bunica lor asistă la următorul dialog:

- Cora:-*Eu am* 75 *de puncte.*
- Ada: -*Cora spune minciuni!*
- Nela: -*Eu nu am* 66 *de puncte.*
- Cora: -*Nela minte!*
- Ada: -*Eu nu am* 69 *de puncte.*
- Nela: -*Și Ada, și Cora spun minciuni!*

Știind că fiecare dintre fete fie minte pe tot parcursul discuției, fie spune adevărul pe tot parcursul discuției, aflați câte puncte valorează un diamant.

Demonstrație. Analizăm informațiile

- Ada: -*Cora spune minciuni!*
- Cora: -*Nela minte!*
- Nela: -*Și Ada, și Cora spun minciuni!*

Dacă Ada spune adevărul, atunci Cora minte, deci Nela spune adevărul, ceea ce înseamnă că Ada simultan spune adevărul și minte, imposibil! Dacă Ada minte, atunci Cora spune adevărul, prin urmare Nela minte, așadar numai Cora spune adevărul, iar Ada și Nela mint. Deducem astfel că Ada are 69 de puncte, Cora are 75 de puncte, Nela are 66 de puncte. Notăm r numărul de puncte pentru un rubin, cu s numărul de puncte pentru un smarald și cu d numărul de puncte pentru un diamant. Ada are

$$3r + 4s + 4d = 69$$

de puncte, Cora are

$$5r + 6s + 3d = 75$$

de puncte și Nela are

$$2r + 2s + 5d = 66$$

de puncte. Ada și Nela au împreună

$$5r + 6s + 9d = 135$$

de puncte, cu $6d = 60$ de puncte mai mult decât Cora. Deducem că un diamant valorează $\boxed{10}$ puncte.

Răspuns corect: $\boxed{10}$ .... $5p$

□

Problema 6

Care este numărul minim de unghiuri cu măsurile de 5° și 7° pe care le putem construi în jurul unui punct, știind că trebuie să desenăm cel puțin câte un unghi din fiecare și suma tuturor unghiurilor desenate este de 360°?

Demonstrație. Notăm cu x numărul de unghiuri de 5° și cu y numărul de unghiuri de 7°, desenate în jurul unui punct. Atunci suma măsurilor lor este

$$5x + 7y = 360.$$

Adunăm $2x$ în ambii membri

$$5x + 2x + 7y = 360 + 2x \iff 7(x + y) = 360 + 2x \iff x + y = \frac{360 + 2x}{7}.$$

Așadar $x + y$ este minim atunci când x este minim. Deoarece $x + y$ este un număr natural, rezultă că $360 + 2x$ este multiplu de 7. Cum $360 = 51 \cdot 7 + 3$, trebuie ca $2x + 3$ să fie multiplu de 7. Căutăm cel mai mic x pentru care $2x + 3$ este multiplu de 7. Cel mai mic multiplu de 7 mai mare decât 3 este 7, deci

$$2x + 3 = 7 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$$

Așadar, numărul minim de unghiuri de 5° este $x_{\min} = 2$. Atunci

$$y = \frac{360 - 5x}{7} = \frac{360 - 10}{7} = \frac{350}{7} = 50,$$

iar numărul total minim de unghiuri este

$$x + y = 2 + 50 = 52.$$

Prin urmare, numărul minim de unghiuri de măsură 5° și 7° care pot fi desenate în jurul unui punct este $\boxed{52}$.

Răspuns corect: $\boxed{52}$ 5*p*

□

Problema 7

Considerăm mulțimea

$$A = \left\{ \frac{7 \cdot m + 2 \cdot n}{2 \cdot m + 7 \cdot n} \in \mathbb{N}^* \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Determinați suma elementelor mulțimii A.

Demonstrație. Notăm

$$\frac{7m + 2n}{2m + 7n} = a \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci

$$7m + 2n = a(2m + 7n) \iff$$
$$7m + 2n = 2am + 7an \iff$$
$$(7 - 2a)m + (2 - 7a)n = 0 \iff$$

$$(2a-7)m = (2-7a)n.$$

Cum $a \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $2-7a<0$, și cum $m,n \in \mathbb{N}^*$ din egalitatea de mai sus obținem

$$2a-7<0 \iff a<\frac{7}{2},$$

iar deoarece $a \in \mathbb{N}^*$, obținem

$$a \in \{1,2,3\}.$$

Verificăm că aceste valori se pot obține:

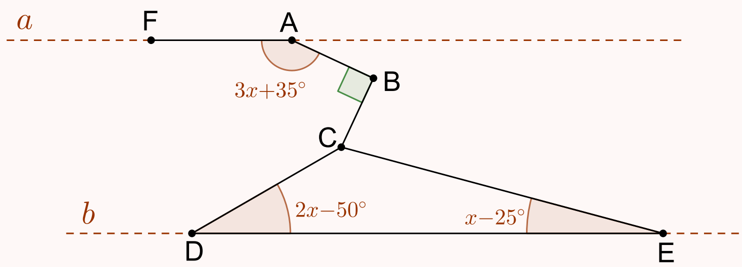
- $a=1 \iff m=n$
- $a=2 \iff m=4n$
- $a=3 \iff m=19n$

Prin urmare, $A=\{1,2,3\}$, iar suma elementelor este $1+2+3=\boxed{6}$.
Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

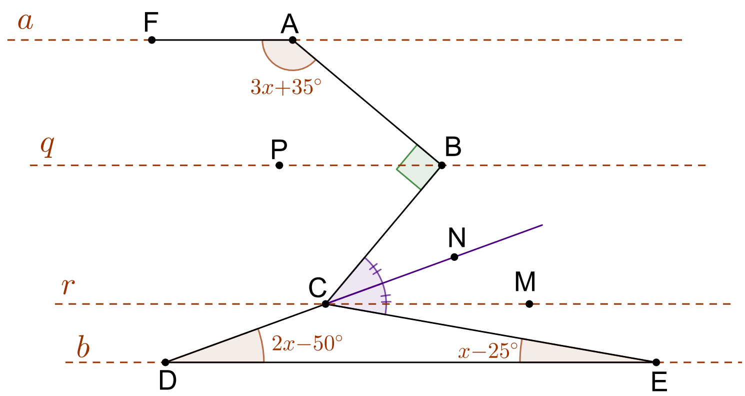
□

Problema 8

În figura de mai jos se cunosc $a \parallel b$, $\angle FAB = 3\cdot x+35^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CDE = 2\cdot x-50^\circ$, $\angle CED = x-25^\circ$. De asemenea, $(CD$ este semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\angle BCE$. Determinați valoarea lui x.



Demonstrație. Considerăm prin B dreapta q paralelă cu a și prin C dreapta r paralelă cu b (deci $q \parallel a$ și $r \parallel b$). Alegem punctele $P \in q$ și $M \in r$, iar $N \in DC$, ca în figură.



Pentru că $r \parallel b$, unghiurile $\angle MCE$ și $\angle CED$ sunt alterne interne, deci

$$\angle MCE = \angle CED = x-25^\circ.$$

Pentru că $r \parallel b$ și DC este o secantă, unghiurile $\angle NCM$ și $\angle CDE$ sunt corespondente, deci

$$\angle NCM = \angle CDE = 2x-50^\circ.$$

Atunci

$$\angle NCE = \angle NCM + \angle MCE = (2x - 50^\circ) + (x - 25^\circ) = 3x - 75^\circ.$$

Cum DC este bisectoarea unghiului $\angle BCE$ și $N \in DC$, rezultă că dreapta CN (bisectoarea) împarte unghiul $\angle BCE$ în două unghiuri egale, deci

$$\angle BCN = \angle NCE = 3x - 75^\circ.$$

Prin urmare,

$$\angle BCM = \angle BCN + \angle NCM = (3x - 75^\circ) + (2x - 50^\circ) = 5x - 125^\circ.$$

Pentru că $q \parallel r$, unghiurile $\angle PBC$ și $\angle BCM$ sunt alterne interne, deci

$$\angle PBC = \angle BCM = 5x - 125^\circ. \tag{1}$$

Mai departe, deoarece $a \parallel q$, unghiurile $\angle PBA$ și $\angle BAF$ sunt suplementare, deci

$$\angle PBA = 180^\circ - \angle BAF = 180^\circ - (3x + 35^\circ) = 145^\circ - 3x. \tag{2}$$

Cum $\angle ABC = 90^\circ$, iar semidreapta BP se află în interiorul unghiului $\angle ABC$, avem

$$\angle PBA + \angle PBC = 90^\circ.$$

Din (1) și (2) obținem

$$(145^\circ - 3x) + (5x - 125^\circ) = 90^\circ \iff$$
$$2x + 20^\circ = 90^\circ \iff$$
$$x = \boxed{35^\circ}.$$

Răspuns corect: $\boxed{35}$ .... $5p$

□

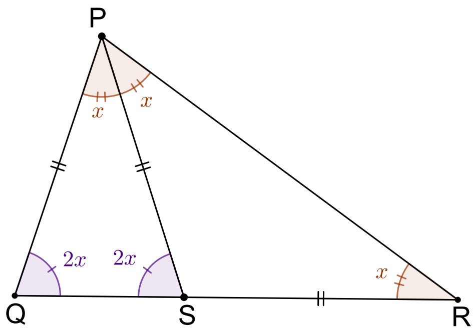
Problema 9

În triunghiul PQR, punctul S se află pe latura QR. Se știe că

$$\angle QPS = \angle SPR, \qquad PQ = PS = SR$$

Determinați măsura unghiului $\angle PRQ$.

Demonstrație.



Notăm cu $x = \angle PRQ$. Deoarece $SR = SP$, rezultă că triunghiul SPR este isoscel cu baza PR, deci

$$\angle SPR = \angle SRP = x.$$

Din ipoteză avem

$$\angle QPS = \angle RPS,$$

de unde

$$\angle QPS = x.$$

Aplicăm teorema unghiului exterior în triunghiul SPR:

$$\angle PSQ = \angle SPR + \angle SRP \iff \angle PSQ = x + x \iff \angle PSQ = 2x.$$

Cum $PQ = PS$, rezultă că triunghiul PQS este isoscel cu baza QS, deci

$$\angle PQS = \angle PSQ = 2x.$$

În triunghiul PQR avem:

$$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ \iff$$

$$2x + 2x + x = 180^\circ \iff 5x = 180^\circ \iff x = \boxed{36^\circ}.$$

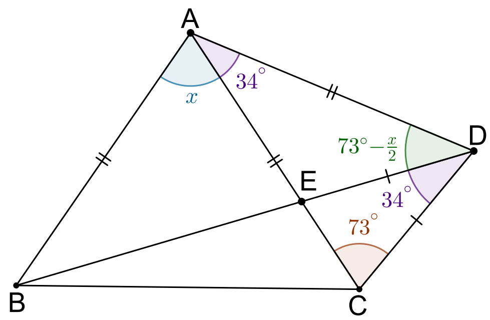
Răspuns corect: $\boxed{36}$ .... $5p$

□

Problema 10

Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Construim în exterior un triunghi $\triangle ACD$ cu $AC = AD$, astfel încât punctele C și D sunt în același semiplan față de dreapta AB. Notăm cu E intersecția dreptelor AC și BD. Știind că $DC = DE$ și că măsura unghiului $\angle DEC = 73^\circ$, să se determine măsura unghiului $\angle BAC$.

Demonstrație.



Din $DC = DE$ rezultă că $\triangle DCE$ este isoscel, deci

$$\angle DCE = \angle DEC = 73^\circ,$$

iar atunci unghiul la vârf este

$$\angle CDE = 180^\circ - 2 \cdot 73^\circ = 34^\circ. \tag{1}$$

În triunghiul isoscel $\triangle ACD$, cu $AC = AD$, unghiurile de la bază sunt egale:

$$\angle ACD = \angle CDA = 73^\circ,$$

de unde
$$\angle CAD = 180^\circ - 2 \cdot 73^\circ = 34^\circ. \tag{2}$$
Notăm $x = \angle BAC$. Atunci folosind relația (2)
$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = x + 34^\circ.$$
În triunghiul isoscel $\triangle ABD$, cu $AB = AD$, unghiurile de la bază sunt egale:
$$\angle BDA = \angle ABD = \frac{180^\circ - (x + 34^\circ)}{2} = 73^\circ - \frac{x}{2}. \tag{3}$$
Deoarece
$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA. \tag{4}$$
Înlocuind în (4) valorile din (1), (3) și faptul că $\angle CDA = 73^\circ$, obținem
$$73^\circ = 34^\circ + \left(73^\circ - \frac{x}{2}\right) \iff \frac{x}{2} = 34^\circ \quad \Longrightarrow \quad x = 68^\circ.$$
Prin urmare, măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu $\boxed{68^\circ}$.

Răspuns corect: $\boxed{68}$ .... $5p$

$\square$

Problema 11

Pentru un număr natural a vom nota cu $S(a)$ suma cifrelor lui a. Aflați pentru câte numere naturale a este verificată relația
$$a + S\left(S(S(a))\right) = 2026.$$

Demonstrație. Din relația
$$a + S(S(S(a))) = 2026$$
rezultă $a < 2026$, deci a are cel mult 4 cifre. Prin urmare
$$S(a) \le S(1999) = 1 + 9 + 9 + 9 = 28.$$
Rezultă
$$S(S(a)) \le S(28) = 10,$$
de unde
$$S(S(S(a))) \le S(9) = 9.$$
Pe de altă parte, se știe că un număr și suma cifrelor sale dau același rest la împărțirea prin 9. Prin aplicări succesive rezultă că
$$a,\ S(a),\ S(S(a)),\ S(S(S(a)))$$
dau același rest la împărțirea prin 9. Notăm $S(S(S(a))) = r$. Evident $r < 9$, altfel dacă $r = 9$, atunci a ar fi și el multiplu de 9, contradicție cu faptul că 2026 nu este un multiplu de 9. Atunci $a = \mathcal{M}_9 + r$, iar din, ecuația dată obținem
$$a + r = 2026 \iff \mathcal{M}_9 + 2r = 2026.$$
Cum $2026 = 9 \cdot 225 + 1$, rezultă că suma a două numere cu același rest la împărțirea prin 9 este un număr care dă restul 1 la împărțirea prin 9. Singura posibilitate este $r = 5$. Deci $S(S(S(a))) = 5$. Ecuația devine $a + 5 = 2026$, de unde valoarea numărului a este 2021, deci numărul de valori pe care le poate lua a este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 12

Se consideră m puncte în plan, astfel încât oricare trei puncte sunt necoliniare, cu excepția unui grup de exact patru puncte care sunt coliniare. Știind că numărul total de drepte determinate de ele este 40, aflați valoarea numărului m.

Gala Călușeru, elevă, Deva

Demonstrație. Presupunem mai întâi că oricare trei puncte nu sunt coliniare. Prin fiecare punct trec dreptele determinate de el cu celelalte puncte, deci printr-un punct trec $m - 1$ drepte. Astfel, dacă numărăm „dreptele prin puncte”, obținem în total

$$m(m-1)$$

drepte. Dar fiecare dreaptă este numărată de două ori: o dată din capătul ei din stânga și o dată din capătul ei din dreapta (adică din cele două puncte care o determină). De aceea împărțim la 2, iar numărul total de drepte este

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

În problema noastră există exact 4 puncte coliniare. Dacă ele ar fi fost în poziție generală, atunci fiecare pereche dintre aceste 4 puncte ar fi dat o dreaptă diferită, adică am fi numărat $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ drepte. Dar, fiind coliniare, toate aceste perechi determină aceeași dreaptă, deci în loc de 6 drepte avem doar 1. Prin urmare, trebuie să scădem din numărul general exact $6 - 1 = 5$ drepte. Așadar, numărul total de drepte este

$$40 = \frac{m(m-1)}{2} - 5.$$

Rezultă:

$$\frac{m(m-1)}{2} = 45 \iff m(m-1) = 90 \iff$$
$$m^2 - m - 90 = 0 \iff (m-10)(m+9) = 0.$$

Cum m este număr natural, obținem că valoarea numărului m este egală cu $\boxed{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{10}$ .... $5p$

□

Problema 13

Fie $1 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p$, toate numerele naturale care au un număr impar de divizori naturali și care sunt divizori al lui 2026^2. Calculați suma

$$S = \frac{2026^2}{m_1} + \frac{2026^2}{m_2} + \cdots + \frac{2026^2}{m_p}.$$

Gala Călușeru, elevă, Deva

Demonstrație. Numărul de divizori ai lui m este impar dacă și numai dacă m este pătrat perfect. Prin urmare,

$$m = k^2, \quad k \in \mathbb{N},\ k > 1.$$

Din condiția $m \mid 2026^2$ rezultă

$$k^2 \mid 2026^2 \implies k \mid 2026.$$

Factorizăm:

$$2026 = 2 \cdot 1013,$$

iar divizorii pozitivi ai lui 2026 sunt

$$1,\ 2,\ 1013,\ 2026.$$

Cum $k > 1$, obținem

$$k \in \{2, 1013, 2026\} \implies m \in \{4, 1013^2, 2026^2\}.$$

Așadar,

$$S = \frac{2026^2}{4} + \frac{2026^2}{1013^2} + \frac{2026^2}{2026^2} = \left(\frac{2026}{2}\right)^2 + \left(\frac{2026}{1013}\right)^2 + 1 = 1013^2 + 2^2 + 1 = \boxed{1\,026\,174.}$$

Răspuns corect: $\boxed{1026174}$ 5p

□

Problema 14

Aflați care este cel mai mare număr natural prin care se poate simplifica fracția

$$\frac{2^{5n+2} \cdot 3^{5n+3} + 7}{2^{5n+4} \cdot 3^{5n+2} + 6},$$

unde n este număr natural mai mare sau egal decât 2026.

Demonstrație. Notăm

$$a = 2^{5n+2} \cdot 3^{5n+3} + 7.$$

Scriem

$$a = 2^{5n+2} \cdot 3^{5n+2} \cdot 3 + 7 \iff a = 6^{5n+2} \cdot 3 + 7.$$

Ultima cifră a lui 6^{5n+2} este 6, deci ultima cifră a lui $6^{5n+2} \cdot 3$ este aceeași ca a lui $6 \cdot 3 = 18$, adică 8. Prin urmare, ultima cifră a lui a este aceeași ca a lui $8 + 7 = 15$, adică 5. Deci a se termină în cifra 5, iar de aici rezultă că a este impar și $5 \mid a$. Notăm

$$b = 2^{5n+4} \cdot 3^{5n+2} + 6.$$

Scriem

$$b = 2^{5n+2} \cdot 3^{5n+2} \cdot 2^2 + 6 \iff b = 6^{5n+2} \cdot 4 + 6.$$

Ultima cifră a lui 6^{5n+2} este 6, deci ultima cifră a lui $6^{5n+2} \cdot 4$ este aceeași ca a lui $6 \cdot 4 = 24$, adică 4. Prin urmare, ultima cifră a lui b este aceeași ca a lui $4 + 6 = 10$, adică 0. Deci b se termină în cifra 0, de unde rezultă că $10 \mid b$, în special $5 \mid b$. Fie $d = (a, b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor a și b. Din $d \mid a$ și $d \mid b$ rezultă $d \mid (4a - 3b)$. Calculăm:

$$4a - 3b = 4(6^{5n+2} \cdot 3 + 7) - 3(6^{5n+2} \cdot 4 + 6)$$

$$= 12 \cdot 6^{5n+2} + 28 - 12 \cdot 6^{5n+2} - 18 = 10.$$

Prin urmare, $d \mid 10 \iff d \in \{1, 2, 5, 10\}$. Cum a este impar, rezultă că și d este impar, deci $d \in \{1, 5\}$. Dar am arătat mai sus că $5 \mid a$ și $5 \mid b$, deci $5 \mid d$, așadar $\boxed{d = 5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

Problema 15

Numărul $n = 2^a \cdot 3^b$ are 20 de divizori. Știind că $\frac{n}{9}$ are cu 8 divizori mai puțin decât numărul n, aflați numărul n.

Andru Oancea, elev, Sibiu

Demonstrație. Știm că, dacă

$$n = 2^a \cdot 3^b,$$

atunci numărul divizorilor lui n este

$$d(n) = (a+1)(b+1).$$

Din enunț,

$$(a+1)(b+1) = 20. \tag{1}$$

De asemenea,

$$\frac{n}{9} = 2^a \cdot 3^{b-2},$$

deci

$$d\left(\frac{n}{9}\right) = (a+1)(b-1).$$

Cum acest număr este cu 8 mai mic decât $d(n)$, avem

$$(a+1)(b-1) + 8 = (a+1)(b+1) \iff$$

$$(a+1)\Big[(b+1) - (b-1)\Big] = 8 \iff$$

$$(a+1) \cdot 2 = 8 \iff$$

$$a + 1 = 4 \iff a = 3.$$

Introducem în (1):

$$4(b+1) = 20 \implies b + 1 = 5 \implies b = 4.$$

Prin urmare, $n = 2^3 \cdot 3^4 = 8 \cdot 81 = \boxed{648}$.

Răspuns corect: $\boxed{648}$ .... $5p$

□

Problema 16

Trei alergători A, B și C participă la o cursă de 100 m, fiecare alergând cu viteză constantă. Când A termină cursa, B se află la 10 m în spate, iar când B termină cursa, C se află la 10 m în spatele lui. Cu câți metri în spatele lui A se afla C, când A a terminat cursa?

Demonstrație. Când B termină cursa, el a parcurs 100 m, iar C se află la 10 m în spate, deci C a parcurs 90 m. Așadar, în același timp:

$$B \text{ parcurge } 100\,\text{m}, \quad C \text{ parcurge } 90\,\text{m}.$$

Rezultă că, atunci când B parcurge 90 m, C va parcurge 81 m.

Pe de altă parte, când A termină cursa, B este la 10 m în spate, deci B a parcurs 90 m. În același timp, C a parcurs 81 m. Prin urmare, când A a terminat cursa, C se află la:

$$100 - 81 = \boxed{19}\,\text{m}$$

în spatele lui A.

Răspuns corect: $\boxed{19}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore