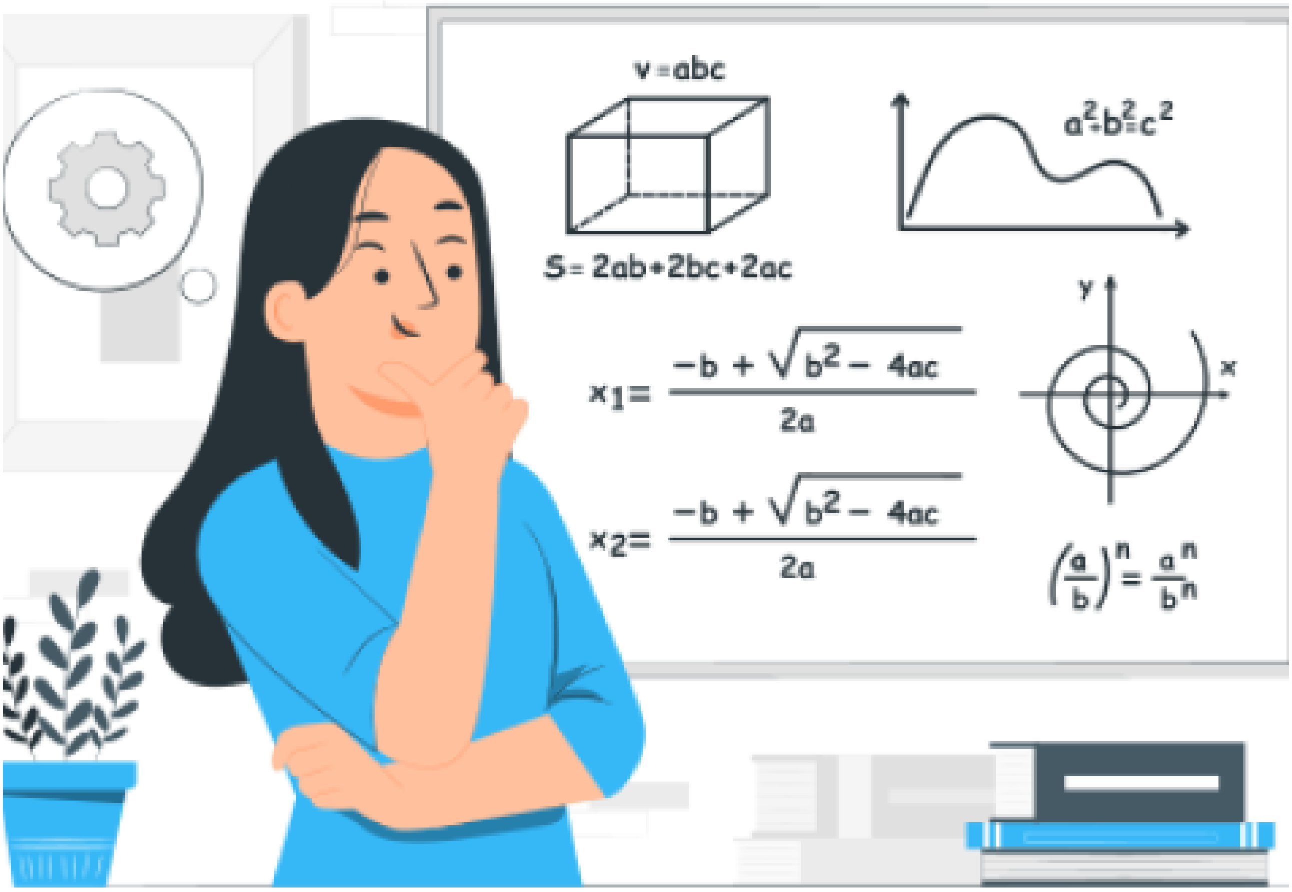


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a VII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

§1 Soluții

Problema 1

Fie $x \in \mathbb{R}$. Determinați numărul soluțiilor ecuației

$$3[x] + 8\{x\} = 5x - 2.$$

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a lui x, iar cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului x.

Demonstrație. Folosim identitatea $\{x\} = x - [x]$, deci ecuația devine

$$3[x] + 8\big(x - [x]\big) = 5x - 2.$$

De aici,

$$3[x] + 8x - 8[x] = 5x - 2 \iff 3x + 2 = 5[x].$$

Notăm $[x] = k$, unde $k \in \mathbb{Z}$, și obținem

$$3x + 2 = 5k \iff x = \frac{5k-2}{3}.$$

Condiția $[x] = k$ se traduce prin

$$k \leq \frac{5k-2}{3} < k + 1.$$

Rezolvăm cele două inegalități:

- $k \leq \dfrac{5k-2}{3} \iff 3k \leq 5k - 2 \iff 2k \geq 2 \iff k \geq 1.$
- $\dfrac{5k-2}{3} < k + 1 \iff 5k - 2 < 3k + 3 \iff 2k < 5 \iff k < \dfrac{5}{2}.$

Prin urmare, $k \in \mathbb{Z}$ și $1 \leq k < \frac{5}{2}$, deci $k \in \{1, 2\}$.

- Pentru $k = 1$, rezultă $x = \dfrac{5 \cdot 1 - 2}{3} = 1$.
- Pentru $k = 2$, rezultă $x = \dfrac{5 \cdot 2 - 2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{1, \dfrac{8}{3}\right\}$, iar numărul soluțiilor este $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

□

Problema 2

În triunghiul ABC, notăm cu I centrul cercului înscris. Se știe că

$$\angle BIC = 135^\circ$$

și că raza cercului înscris este

$$r = \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Să se calculeze distanța de la ortocentrul triunghiului ABC la centrul cercului înscris.

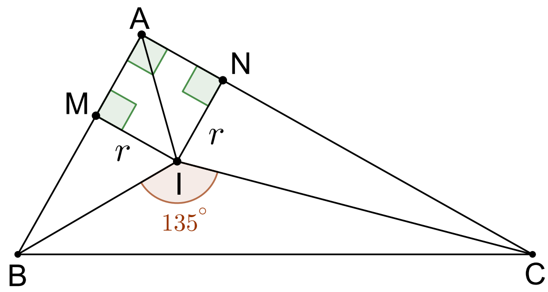
Demonstrație. Folosim relația binecunoscută:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Din condiția problemei,

$$90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = 135^\circ \iff \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ \iff \angle BAC = 90^\circ.$$

Rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci ortocentrul este chiar vârful unghiului drept. Prin urmare, distanța cerută este $HI = AI$. Într-un triunghi dreptunghic, centrul cercului înscris se află la aceeași distanță r de catete. Notăm cu M piciorul perpendicularei din I pe AB și cu N piciorul perpendicularei din I pe AC.



Atunci

$$IM \perp AB, \quad IN \perp AC, \quad M \in AB, \quad N \in AC,$$

și

$$IM = IN = r = \sqrt{2}.$$

Patrulaterul $AMIN$ are 3 unghiuri drepte, deci este dreptunghi. În plus

$$IM = IN,$$

deci dreptunghiul $AMIN$ este pătrat. Așadar

$$AM = IM = \sqrt{2}.$$

În triunghiul dreptunghic AIM aplicăm teorema lui Pitagora

$$AI^2 = AM^2 + IM^2 \iff AI^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \iff AI^2 = 4 \iff AI = 2.$$

Deci

$$HI = AI = \boxed{2 \text{ cm}}.$$

Răspuns corect: $\boxed{2}$ 5*p*

□

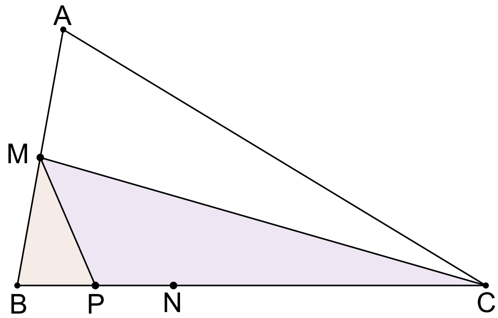
Problema 3

În triunghiul $\triangle ABC$, punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctul N se află pe latura BC. Se știe că P este mijlocul segmentului BN și că

$$\frac{BN}{PC} = \frac{2}{5}.$$

Dacă aria triunghiului $\triangle MBP$ este 1 cm^2, să se determine aria triunghiului $\triangle ABC$.

Demonstrație.



Din faptul că P este mijlocul segmentului BN rezultă

$$BP = PN, \quad BN = 2BP.$$

Avem

$$\frac{BN}{PC} = \frac{2}{5} \iff \frac{2BP}{PC} = \frac{2}{5} \iff \frac{BP}{PC} = \frac{1}{5}.$$

Triunghiurile BMP și PMC au aceeași înălțime din M pe dreapta BC, deci ariile lor sunt proporționale cu bazele:

$$\frac{\mathcal{A}_{BMP}}{\mathcal{A}_{PMC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{1}{5}.$$

Cum $\mathcal{A}_{BMP} = 1$, obținem

$$\frac{1}{\mathcal{A}_{PMC}} = \frac{1}{5} \iff \mathcal{A}_{PMC} = 5.$$

Atunci

$$\mathcal{A}_{MBC} = \mathcal{A}_{BMP} + \mathcal{A}_{PMC} = 1 + 5 = 6.$$

În triunghiul ABC, M este mijlocul lui AB, deci CM este mediană, iar aceasta împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale:

$$\mathcal{A}_{MBC} = \mathcal{A}_{MAC}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{A}_{MAC} = 6 \quad \text{și} \quad \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{MAC} = 6 + 6 = \boxed{12 \text{ cm}^2}.$$

Răspuns corect: $\boxed{12}$ 5p

□

Problema 4

Dacă a, b, c, $d \in \mathbb{Q}^*$ și $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, aflați valoarea expresiei $\left(\dfrac{a - b\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}}\right)^2$.

Demonstrație. Din relația

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

cu $c + d\sqrt{2} \neq 0$, obținem:

$$a + b\sqrt{2} = c\sqrt{2} + 2d \iff a - 2d = \sqrt{2}(c - b).$$

Observăm că $a - 2d \in \mathbb{Q}$ și $c - b \in \mathbb{Q}$. Deoarece $\sqrt{2}$ este irațional, produsul $\sqrt{2}(c - b)$ este rațional dacă și numai dacă

$$c - b = 0.$$

Rezultă imediat:

$$c = b \quad \text{și} \quad a = 2d.$$

Calculăm acum expresia cerută:

$$\frac{a - b\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}} = \frac{2d - b\sqrt{2}}{b - d\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}(b - d\sqrt{2})}{b - d\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

Pătratul acestei expresii este

$$\left(\frac{a - b\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}}\right)^2 = \boxed{2}$$

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

□

Problema 5

Care este cel mai mare număr natural $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ pentru care are loc relația

$$\sqrt{\overline{a_1a_2\dots a_n}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 2\,?$$

Demonstrație. Observăm că numerele căutate sunt pătrate perfecte. Vom determina pentru început valorile posibile ale lui n, adică numărul cifrelor numerelor căutate. Cum

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 2 \leq 9n - 2,$$

obținem

$$10^{n-1} \leq \overline{a_1a_2\dots a_n} \leq (9n - 2)^2. \tag{1}$$

Dar $3^{n-1} - 3^{n-2} > 3^5 - 3^4$ pentru că este echivalentă cu $3^{n-2}(3 - 1) > 3^4(3 - 1)$, adevărată pentru orice $n \geq 5$. De aici obținem că

$$3^{n-1} = (3^{n-1} - 3^{n-2}) + (3^{n-2} - 3^{n-3}) + \cdots + (3^5 - 3^4) + 3^4 > 9(n - 5) + 81 > 9n$$

și relația (1) devine

$$(9n - 2)^2 \geq \overline{a_1a_2\dots a_n} \geq 10^{n-1} > 9^{n-1} \geq \left(3^{n-1}\right)^2 > (9n)^2,$$

lucru care nu este posibil. Deducem că n poate lua valorile $1, 2, 3$ sau 4.

- $n = 4 \implies \sqrt{\overline{abcd}} = a + b + c + d - 2 \leq 4 \cdot 9 - 2 = 34 \iff \overline{abcd} \leq 1156$, deci $a = 1$, iar mai departe deducem $\sqrt{\overline{1bcd}} = 1 + b + c + d - 2 \leq 3 \cdot 9 - 1 \iff \overline{1bcd} \leq 676$, fals.
- $n = 3 \implies \sqrt{\overline{abc}} = a + b + c - 2$. Dar $a + b + c - 2 \leq 25$, deci $\overline{abc} \leq 625$. Se verifică pe rând pătratele perfecte mai mici decât 625 și obținem că cel mai mare număr care convine este 289.

Așadar, cel mai mare număr natural care este soluție a ecuației este $\boxed{289}$.

Răspuns corect: $\boxed{289}$ .... $5p$

□

Problema 6

O plăcuță de înmatriculare are forma LLLCCC, adică trei litere urmate de trei cifre. Prin „palindrom" înțelegem un șir de trei caractere de forma XYX. Determinați câte plăcuțe de forma LLLCCC conțin cel puțin un palindrom: fie unul format numai din litere, fie unul format numai din cifre, fie ambele. Se mai știe că numărul de litere care pot fi folosite este 26 și la cifre se pot folosi toate cele 10 cifre pe oricare dintre poziții.

Demonstrație. Analizăm următoarele cazuri:

- **Plăcuțe cu palindrom la litere.** Un palindrom de 3 litere are forma XYX. Alegem X în 26 moduri și Y în 26 moduri, deci 26^2 șiruri de litere. Cifrele se aleg în 10^3 moduri, deci
$$N_L = 26^2 \cdot 10^3.$$
- **Plăcuțe cu palindrom la cifre.** Un palindrom de 3 cifre are forma aba. Alegem a în 10 moduri și b în 10 moduri, deci 10^2 șiruri de cifre. Literele se aleg în 26^3 moduri, deci
$$N_C = 26^3 \cdot 10^2.$$
- **Plăcuțe cu palindrom la litere și la cifre.** În acest caz, numărul de înmatriculare are forma $XYXaba$. Alegem X în 26 moduri și Y în 26 moduri, deci 26^2 șiruri de litere. Alegem a în 10 moduri și b în 10 moduri, deci 10^2 șiruri de cifre. În total
$$N_{L\cap C} = 26^2 \cdot 10^2.$$

Conform principiului includerii și excluderii obținem

$$N = N_L + N_C - N_{L\cap C} = 26^2 \cdot 10^3 + 26^3 \cdot 10^2 - 26^2 \cdot 10^2 \iff$$
$$N = 26^2 \cdot 10^2\,(10 + 26 - 1) = 26^2 \cdot 10^2 \cdot 35 = \boxed{2\,366\,000}.$$

Răspuns corect: $\boxed{2366000}$ 5*p*

□

Problema 7

Un grup de copii este așezat pe teren în rânduri și coloane.

- Dacă numărul de rânduri este egal cu numărul de coloane, după realizarea așezării mai rămân 5 copii în afara formației.
- Dacă numărul de rânduri este cu 7 mai mare decât numărul de coloane, toți copiii pot fi așezați fără să rămână locuri libere.

Determinați numărul maxim de copii din grup.

Demonstrație. Prima așezare. Fie s numărul de copii dintr-un rând (egal cu numărul de coloane). În acest caz, în formație intră s^2 copii, iar alți 5 rămân în afara acesteia, deci numărul total de copii este:
$$s^2 + 5.$$

A doua așezare. Fie c numărul de copii dintr-o coloană. Deoarece numărul de rânduri este cu 7 mai mare decât numărul de coloane, numărul total de copii este:

$$c(c+7) = c^2 + 7c.$$

Egalăm cele două expresii:

$$s^2 + 5 = c^2 + 7c.$$

Înmulțim relația cu 4:

$$4s^2 + 20 = 4c^2 + 28c.$$

Scriem membrul drept ca diferență față de un pătrat perfect:

$$4c^2 + 28c = (2c+7)^2 - 49,$$

de unde:

$$4s^2 + 20 = (2c+7)^2 - 49.$$

Mutând termenii, obținem:

$$(2c+7)^2 - (2s)^2 = 69,$$

adică:

$$(2c+7+2s)(2c+7-2s) = 69.$$

Observăm că $2c+7+2s > 2c+7-2s$. Întrucât $69 = 1 \cdot 69 = 3 \cdot 23$, analizăm cazurile posibile.

- *Cazul 1:* $2c+7+2s = 69$ și $2c+7-2s = 1$. Scăzând ecuațiile:

  $$4s = 68 \iff s = 17.$$

  Numărul total de copii este:

  $$s^2 + 5 = 17^2 + 5 = 294.$$

- *Cazul 2:* $2c+7+2s = 23$ și $2c+7-2s = 3$. Rezultă $s = 5$, iar numărul total de copii este 30.

Numărul **maxim** de copii este $\boxed{294}$.
Răspuns corect: $\boxed{294}$ .... $5p$

□

Problema 8

Fie $S_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 100i \leq n < 100(i+1)\}$. Câte dintre mulțimile

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{999}$$

nu conțin niciun pătrat perfect?

Observație: De exemplu, $S_4 = \{400, 401, 402, \ldots, 499\}$.

Demonstrație. Diferența dintre două pătrate consecutive este

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1.$$

- *Cazul 1:* $k \leq 49$.
  Din relația anterioară, pentru $k \leq 49$ diferența dintre două pătrate consecutive este cel mult $99 < 100$. Așadar nu poate exista un bloc de 100 numere consecutive fără pătrat perfect între 0^2 și 49^2. Cum $49^2 = 2401 \in S_{24}$, fiecare dintre mulțimile $S_0, S_1, \ldots, S_{24}$ conține cel puțin un pătrat perfect.

- *Cazul 2:* $k \geq 50$.
  Din relația anterioară, pentru $k \geq 50$ diferența dintre două pătrate consecutive este cel puțin $101 > 100$. Așadar, în acest caz, două pătrate consecutive sunt la distanță mai mare decât 100, adică mai mare decât lungimea unui interval S_i. Deoarece $49^2 \in S_{24}$ și $50^2 \in S_{25}$, rezultă că de la S_{25} încolo două pătrate perfecte nu pot aparține aceleiași mulțimi S_i, deci fiecare S_i, $i \geq 25$, conține cel mult un pătrat perfect. Cum

  $$316^2 < 100000 < 317^2,$$

  există $316 - 50 + 1 = 267$ astfel de pătrate, iar fiecare determină o mulțime diferită S_i care conține un pătrat perfect.

În total, numărul mulțimilor care conțin cel puțin un pătrat perfect este:

$$25 + 267 = 292.$$

Cum există 1000 mulțimi $S_0, S_1, \ldots, S_{999}$, numărul celor care *nu* conțin niciun pătrat perfect este:

$$1000 - 292 = \boxed{708}.$$

Răspuns corect: $\boxed{708}$ .... $5p$

□

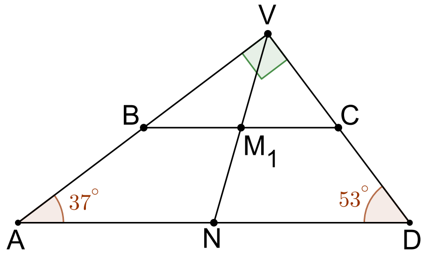
Problema 9

În trapezul $ABCD$ cu $BC \parallel AD$, se dau $BC = 170$ și $AD = 340$. Fie $\angle A = 37°$, $\angle D = 53°$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv AD. Determinați lungimea segmentului MN.

Demonstrație. Notăm cu V punctul de intersecție al dreptelor AB și CD. Deoarece

$$\angle A + \angle D = 37° + 53° = 90°,$$

rezultă că triunghiurile VAD și VBC sunt dreptunghice în V.



Cum $BC \parallel AD$ și

$$BC = 170 = \frac{340}{2} = \frac{AD}{2},$$

rezultă că BC este linie mijlocie în triunghiul VAD. Prin urmare, punctele B și C sunt mijloacele segmentelor VA, respectiv VD. În triunghiul dreptunghic VAD, N este mijlocul ipotenuzei, deci

$$VN = NA = ND = \frac{AD}{2} = 170.$$

Notăm cu M_1 punctul de intersecție al segmentelor VN și BC. Vom arăta că $M_1 = M$. Deoarece B este mijlocul lui VA și $BM_1 \parallel AN$, rezultă că BM_1 este linie mijlocie în triunghiul VAN, deci

$$BM_1 = \frac{AN}{2}.$$

În mod analog, deoarece C este mijlocul lui VD și $CM_1 \parallel DN$, rezultă că CM_1 este linie mijlocie în triunghiul VDN, deci

$$CM_1 = \frac{DN}{2}.$$

Dar $AN = DN$, de unde $BM_1 = CM_1$, astfel M_1 este mijlocul segmentului BC, adică $M_1 = M$. Prin urmare, punctele V, M, N sunt coliniare și

$$MN = VN - VM.$$

În triunghiul dreptunghic VBC, M este mijlocul ipotenuzei, deci

$$VM = \frac{BC}{2} = 85.$$

Astfel:

$$MN = 170 - 85 = \boxed{85}.$$

Răspuns corect: $\boxed{85}$ .... $5p$

□

Problema 10

Pe fiecare dintre laturile unui triunghi se consideră câte n puncte distincte, diferite de vârfurile triunghiului și se notează cu x_n numărul triunghiurilor cu vârfurile printre cele $3n$ puncte. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $x_n > 2026$.

Demonstrație. Alegând un vârf de pe fiecare latură, obținem n^3 triunghiuri, iar dacă alegem două vârfuri de pe o latură, în $\frac{n(n-1)}{2}$ feluri, iar cel de-al treilea vârf din cele $2n$ puncte situate pe celelalte două laturi, vom obține

$$x_n = n^3 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2n = 4n^3 - 3n^2.$$

Deoarece

$$x_8 = 4 \cdot 8^3 - 3 \cdot 8^2 = 2048 - 192 = 1856,$$

și

$$x_9 = 4 \cdot 9^3 - 3 \cdot 9^2 = 2916 - 243 = 2673,$$

iar $1856 < 2026 < 2673$, deducem că cel mai mic număr natural n pentru care $x_n > 2026$ este egal cu $\boxed{9}$.

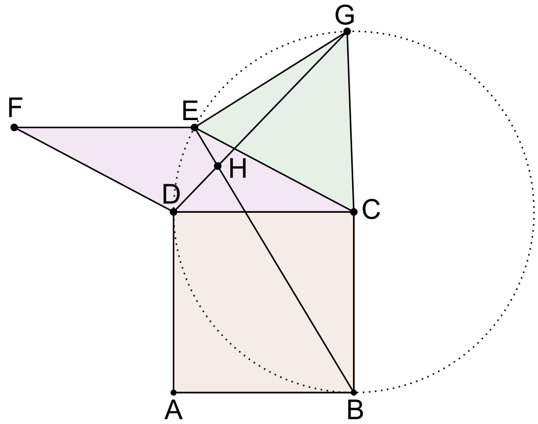
Răspuns corect: $\boxed{9}$ .... $5p$

□

Problema 11

Fie pătratul $ABCD$. Construim pe rând rombul $CDFE$, cu punctele E și B situate de o parte și de alta a dreptei CD, iar apoi triunghiul echilateral ECG, astfel încât punctele G și F sunt de o parte și de alta a dreptei CE, iar punctele G și E sunt de aceeași parte a dreptei BC. Aflați măsura unghiului format de dreptele DG și BE.

Demonstrație. Deoarece $CB = CD = CE = CG$, putem considera cercul cu centrul în C și raza CB. Astfel, punctele B, D, E și G sunt conciclice.



Notăm cu H punctul de intersecție al dreptelor DG și BE. Unghiul cerut este $\angle DHB$ sau $\angle BHG$, în funcție de care dintre ele este mai mic. Oricare dintre acestea este un unghi cu vârful în interiorul cercului, deci avem:

$$\angle DHB = \frac{\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{EG}}{2}.$$

Observăm că

$$\overset{\frown}{DB} = \angle DCB = 90^\circ, \qquad \overset{\frown}{EG} = \angle ECG = 60^\circ.$$

Prin urmare,

$$\angle DHB = \frac{90^\circ + 60^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = \boxed{75^\circ}.$$

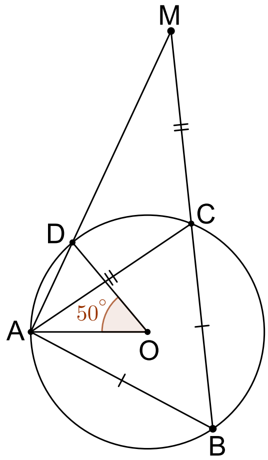
Răspuns corect: $\boxed{75}$ 5p

□

Problema 12

Se consideră patru puncte A, B, C și D situate în această ordine pe un cerc de centru O, cu $\angle AOD = 50^\circ$ și $BA = BC$. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor AD și BC, cu $C \in (BM)$. Știind că $AC = MC$, aflați măsura unghiului ABC.

Demonstrație. Din $\angle AOD = 50^\circ$ rezultă că $\overset{\frown}{AD} = 50^\circ$.



Deoarece $AC = MC$, triunghiul CAM este isoscel, deci

$$\angle CMA = \angle CAM = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}.$$

În triunghiul $\triangle ACM$, unghiul $\angle ACB$ este unghi exterior, deci

$$\angle ACB = 2 \cdot \angle CAM,$$

de unde rezultă:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 2 \cdot \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \iff \overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{CD}.$$

În triunghiul BAC avem $BA = BC$, deci

$$\angle BAC = \angle BCA,$$

ceea ce implică

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \overset{\frown}{CD}.$$

Din relația

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360^\circ$$

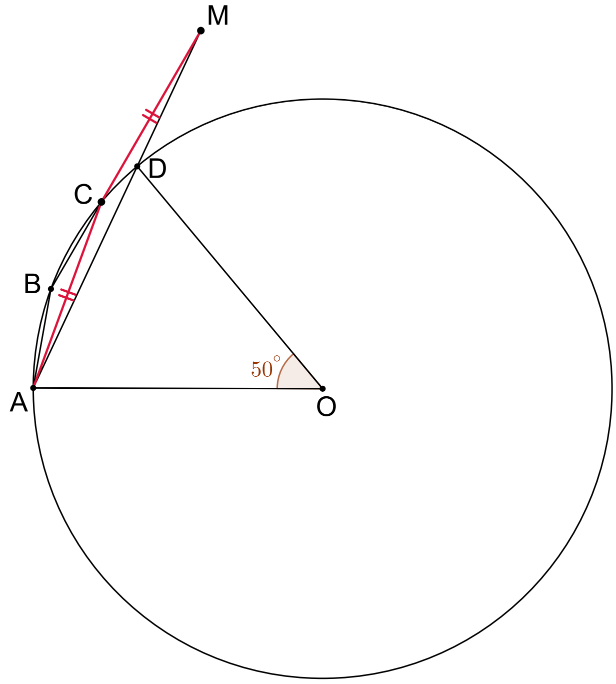
obținem:

$$2 \cdot \overset{\frown}{CD} + 2 \cdot \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CD} + 50^\circ = 360^\circ \iff \overset{\frown}{CD} = 62^\circ.$$

În final,

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{50^\circ + 62^\circ}{2} = \boxed{56^\circ}.$$

Cazul 2: În urma **contestațiilor primite** a reieșit că mai există o configurație valabilă, cea în care punctele B și C sunt în interiorul arcului $\overset{\frown}{AD}$ și în acest caz măsura unghiului $\angle ABC = \boxed{160^\circ}$. Vom considera corecte ambele variante de răspuns.



Din $\angle AOD = 50°$ rezultă că

$$\overset{\frown}{AD} = 50°.$$

Cum $BA = BC$, rezultă că arcele corespunzătoare sunt egale, deci notăm

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = x \implies \overset{\frown}{CD} = 50° - 2x.$$

Deoarece $AC = MC$, triunghiul ACM este isoscel, deci

$$\angle CAM = \angle CMA.$$

Dar,

$$\angle CAM = \angle CAD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50° - 2x}{2} = 25° - x.$$

Pe de altă parte, $\angle CMA$ este unghi exterior cercului determinat de secantele MCB și MDA, deci

$$\angle CMA = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{x - (50° - 2x)}{2} = \frac{3x - 50°}{2}.$$

Egalând cele două unghiuri, obținem

$$25° - x = \frac{3x - 50°}{2} \iff 100° = 5x \iff x = 20°..$$

Așadar,

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = 20° \implies \overset{\frown}{AC} = 40°.$$

Cum punctul B se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AC}$, unghiul înscris $\angle ABC$ subîntinde arcul mare $\overset{\frown}{AC}$, deci

$$\angle ABC = \frac{360° - 40°}{2} = \boxed{160°}.$$

Răspuns corect: $\boxed{56,\ 160}$ 5p

□

Problema 13

Aflați numărul perechilor de numere naturale (a, b) care verifică simultan relațiile

$$\sqrt{a-4\sqrt{b}}=1 \quad \text{respectiv} \quad \sqrt{b+4\sqrt{a}}=4.$$

Demonstrație. Avem:

$$\sqrt{a-4\sqrt{b}}=1 \iff a-4\sqrt{b}=1 \iff \sqrt{b}=\frac{a-1}{4}\in\mathbb{Q}.$$

$$\sqrt{b+4\sqrt{a}}=4 \iff b+4\sqrt{a}=16 \iff \sqrt{a}=\frac{16-b}{4}\in\mathbb{Q}.$$

Prin urmare, atât a cât și b sunt pătrate perfecte. În plus, din $b+4\sqrt{a}=16$ avem $b\leq 16$, deci

$$b\in\{0,1,4,9,16\}.$$

Verificăm aceste valori:

- Pentru $b=0$ rezultă $\sqrt{a}=4$, deci $a=16$, dar atunci $\sqrt{a-4\sqrt{b}}=\sqrt{16}=4\neq 1$.
- Pentru $b=1$ rezultă $\sqrt{a}=\frac{15}{4}\notin\mathbb{N}$.
- Pentru $b=4$ rezultă $\sqrt{a}=3$, deci $a=9$, iar verificarea dă:

  $$\sqrt{a-4\sqrt{b}}=\sqrt{9-4\cdot 2}=\sqrt{1}=1,$$

  deci condițiile sunt îndeplinite.
- Pentru $b=9$ rezultă $\sqrt{a}=\frac{7}{4}\notin\mathbb{N}$.
- Pentru $b=16$ rezultă $\sqrt{a}=0$, deci $a=0$, dar atunci $\sqrt{a-4\sqrt{b}}=\sqrt{-16}$ nu are sens.

Singura soluție este $(a,b)=(9,4)$, deci numărul perechilor de numere naturale care verifică cele două ecuații este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 14

Mulțimea A este formată din m numere întregi consecutive a căror sumă este $2m$, iar mulțimea B este formată din $2m$ numere întregi consecutive a căror sumă este m. Valoarea absolută a diferenței dintre cel mai mare element al mulțimii A și cel mai mare element al mulțimii B este 99. Determinați m.

Demonstrație. Notăm:

$$A=\{a+1,a+2,\ldots,a+m\}, \qquad B=\{b+1,b+2,\ldots,b+2m\}.$$

Suma elementelor mulțimii A este:

$$S_A=ma+\frac{m(m+1)}{2}=2m.$$

Împărțind prin m obținem:

$$a + \frac{m+1}{2} = 2 \iff 2a + m + 1 = 4 \iff a = \frac{3-m}{2}. \tag{1}$$

Suma elementelor mulțimii B este:

$$S_B = 2m\,b + \frac{2m(2m+1)}{2} = m.$$

Împărțind prin m obținem:

$$2b + 2m + 1 = 1 \iff b = -m. \tag{2}$$

Cel mai mare element al mulțimii A este $a+m$, iar cel mai mare element al mulțimii B este $b+2m$. Din condiție:

$$|(a+m) - (b+2m)| = 99 \iff |b+m-a| = 99. \tag{3}$$

Înlocuim relațiile (1) și (2) în relația (3) și obținem:

$$\left|-m + m - \frac{3-m}{2}\right| = 99 \iff \frac{|m-3|}{2} = 99 \iff |m-3| = 198.$$

Cum m este un număr natural pozitiv, rezultă:

$$m - 3 = 198 \quad \Rightarrow \quad m = \boxed{201}.$$

Răspuns corect: $\boxed{201}$ .... $5p$

□

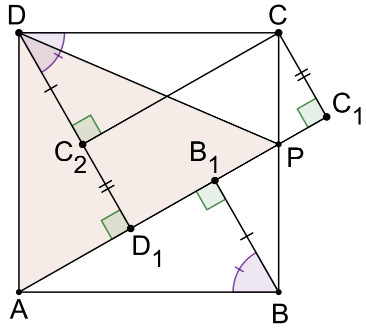
Problema 15

Fie pătratul $ABCD$ și un punct $P \in (BC)$ astfel încât $AP = 4$. Notăm cu B_1, C_1 și D_1 picioarele perpendicularelor duse din B, C, respectiv D pe dreapta AP. Știind că

$$BB_1 + CC_1 + DD_1 = 6,$$

determinați aria triunghiului APD.

Demonstrație. Construim perpendiculara din C pe dreapta DD_1 și notăm cu C_2 piciorul acesteia, $CC_2 \perp DD_1, C_2 \in DD_1$.



Cum $BB_1 \perp AP$ și $DD_1 \perp AP$, rezultă $BB_1 \parallel DD_1$. Atunci unghiurile $\angle ABB_1$ și $\angle CDC_2$ sunt congruente fiind 2 unghiuri ascuțitunghice cu laturile paralele. Rezultă că triunghiurile dreptunghice $\triangle ABB_1$ și $\triangle CDC_2$ sunt congruente (cazul IU), deci

$$BB_1 = DC_2.$$

Mai departe, deoarece $CC_2 \perp DD_1$ și $DD_1 \perp AP$, obținem $CC_2 \parallel AP$. De asemenea, $CC_1 \perp AP$ și $DD_1 \perp AP$, deci $CC_1 \parallel DD_1$. Prin urmare, patrulaterul $CC_2D_1C_1$ este un dreptunghi, deci

$$C_2D_1 = CC_1.$$

Atunci folosind relațiile de mai sus obținem

$$BB_1 + CC_1 + DD_1 = 6 \iff DC_2 + C_2D_1 + DD_1 = 6 \iff$$
$$2DD_1 = 6 \iff DD_1 = 3$$

Aria triunghiului APD este:

$$A_{\triangle APD} = \frac{AP \cdot DD_1}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \boxed{6}.$$

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 16

Pentru câte valori ale lui $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, numărul

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

este element al mulțimii

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| < \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}\right\}?$$

Demonstrație. Raționalizăm termenul general al sumei:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

Prin urmare, suma devine:

$$a = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \sqrt{n}-1.$$

Observăm că

$$11 - 6\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^2 \implies \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ avem $n \geq 2$, deci $\sqrt{n}-1 > 0$ și condiția $a \in A$ devine

$$|\sqrt{n}-1| < 3-\sqrt{2} \iff \sqrt{n}-1 < 3-\sqrt{2} \iff \sqrt{n} < 4-\sqrt{2}.$$

Ridicând la pătrat (ambele părți sunt pozitive),

$$n < (4-\sqrt{2})^2 = 16 + 2 - 8\sqrt{2} = 18 - 8\sqrt{2}.$$

Cum $6 < 18 - 8\sqrt{2} < 7$, rezultă $n \leq 6$. Împreună cu $n \geq 2$ obținem

$$n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Prin urmare, numărul valorilor lui n este $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

$\square$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore