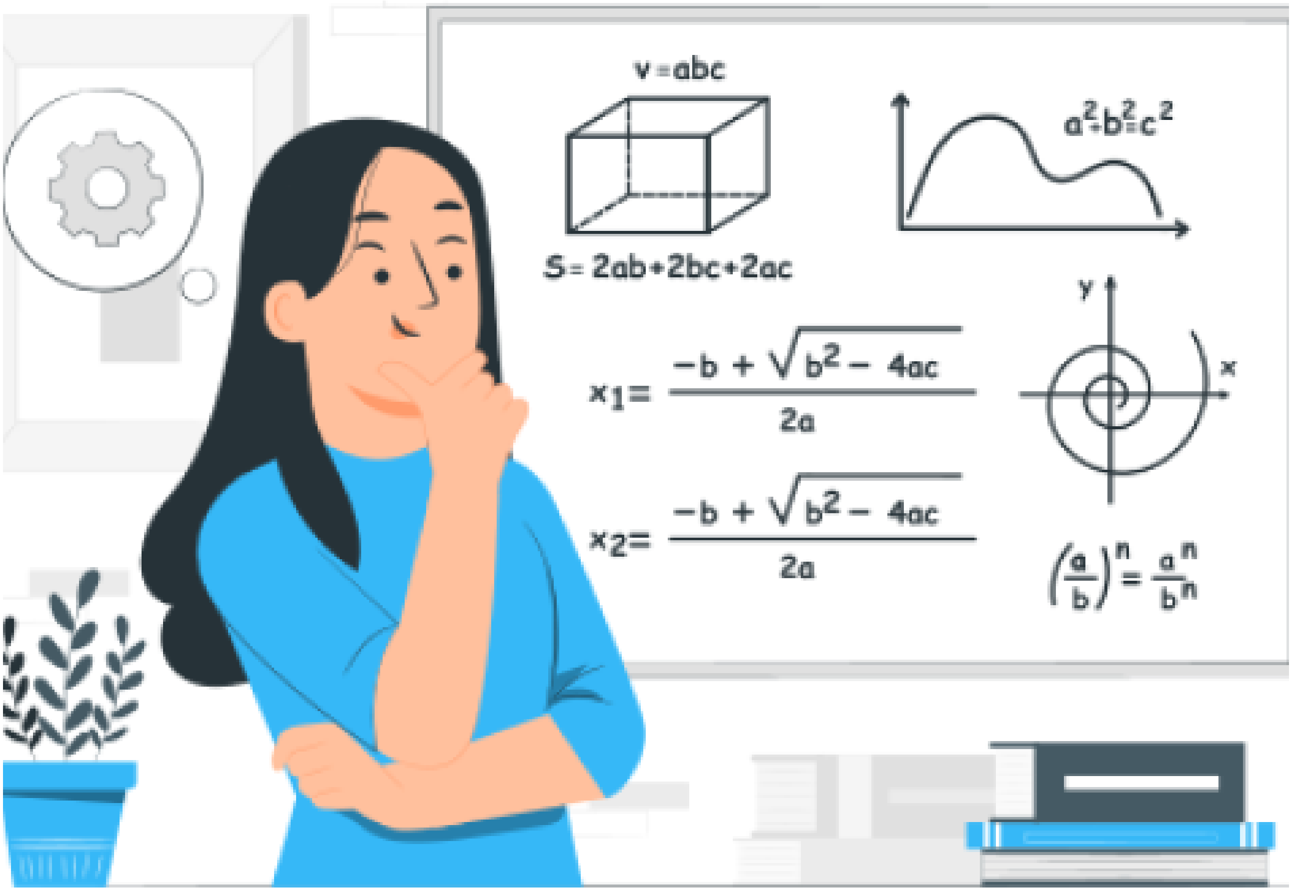

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a VII-a

- Subiecte -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $x \in \mathbb{R}$. Determinați numărul soluțiilor ecuației

$$3[x] + 8\{x\} = 5x - 2.$$

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a lui x, iar cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului x.

Problema 2

În triunghiul ABC, notăm cu I centrul cercului înscris. Se știe că

$$\angle BIC = 135^\circ$$

și că raza cercului înscris este

$$r = \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Să se calculeze distanța de la ortocentrul triunghiului ABC la centrul cercului înscris.

Problema 3

În triunghiul $\triangle ABC$, punctul M este mijlocul laturii AB, iar punctul N se află pe latura BC. Se știe că P este mijlocul segmentului BN și că

$$\frac{BN}{PC} = \frac{2}{5}.$$

Dacă aria triunghiului $\triangle MBP$ este 1 cm^2, să se determine aria triunghiului $\triangle ABC$.

Problema 4

Dacă a, b, c, $d \in \mathbb{Q}^*$ și $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, aflați valoarea expresiei $\left(\dfrac{a - b\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}}\right)^2$.

Problema 5

Care este cel mai mare număr natural $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ pentru care are loc relația

$$\sqrt{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 2\,?$$

Problema 6

O plăcuță de înmatriculare are forma LLLCCC, adică trei litere urmate de trei cifre. Prin „palindrom” înțelegem un șir de trei caractere de forma XYX. Determinați câte plăcuțe de forma LLLCCC conțin cel puțin un palindrom: fie unul format numai din litere, fie unul format numai din cifre, fie ambele. Se mai știe că numărul de litere care pot fi folosite este 26 și la cifre se pot folosi toate cele 10 cifre pe oricare dintre poziții.

Problema 7

Un grup de copii este așezat pe teren în rânduri și coloane.

- Dacă numărul de rânduri este egal cu numărul de coloane, după realizarea așezării mai rămân 5 copii în afara formației.
- Dacă numărul de rânduri este cu 7 mai mare decât numărul de coloane, toți copiii pot fi așezați fără să rămână locuri libere.

Determinați numărul maxim de copii din grup.

Problema 8

Fie $S_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 100i \leq n < 100(i+1)\}$. Câte dintre mulțimile

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{999}$$

nu conțin niciun pătrat perfect?

Observație: De exemplu, $S_4 = \{400, 401, 402, \ldots, 499\}$.

Problema 9

În trapezul $ABCD$ cu $BC \parallel AD$, se dau $BC = 170$ și $AD = 340$. Fie $\angle A = 37°$, $\angle D = 53°$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv AD. Determinați lungimea segmentului MN.

Problema 10

Pe fiecare dintre laturile unui triunghi se consideră câte n puncte distincte, diferite de vârfurile triunghiului și se notează cu x_n numărul triunghiurilor cu vârfurile printre cele $3n$ puncte. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $x_n > 2026$.

Problema 11

Fie pătratul $ABCD$. Construim pe rând rombul $CDFE$, cu punctele E și B situate de o parte și de alta a dreptei CD, iar apoi triunghiul echilateral ECG, astfel încât punctele G și F sunt de o parte și de alta a dreptei CE, iar punctele G și E sunt de aceeași parte a dreptei BC. Aflați măsura unghiului format de dreptele DG și BE.

Problema 12

Se consideră patru puncte A, B, C și D situate în această ordine pe un cerc de centru O, cu $\angle AOD = 50°$ și $BA = BC$. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor AD și BC, cu $C \in (BM)$. Știind că $AC = MC$, aflați măsura unghiului ABC.

Problema 13

Aflați numărul perechilor de numere naturale (a, b) care verifică simultan relațiile

$$\sqrt{a - 4\sqrt{b}} = 1 \quad \text{respectiv} \quad \sqrt{b + 4\sqrt{a}} = 4.$$

Problema 14

Mulțimea A este formată din m numere întregi consecutive a căror sumă este $2m$, iar mulțimea B este formată din $2m$ numere întregi consecutive a căror sumă este m. Valoarea absolută a diferenței dintre cel mai mare element al mulțimii A și cel mai mare element al mulțimii B este 99. Determinați m.

Problema 15

Fie pătratul $ABCD$ și un punct $P \in (BC)$ astfel încât $AP = 4$. Notăm cu B_1, C_1 și D_1 picioarele perpendicularelor duse din B, C, respectiv D pe dreapta AP. Știind că

$$BB_1 + CC_1 + DD_1 = 6,$$

determinați aria triunghiului APD.

Problema 16

Pentru câte valori ale lui $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, numărul

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

este element al mulțimii

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| < \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \right\}?$$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore