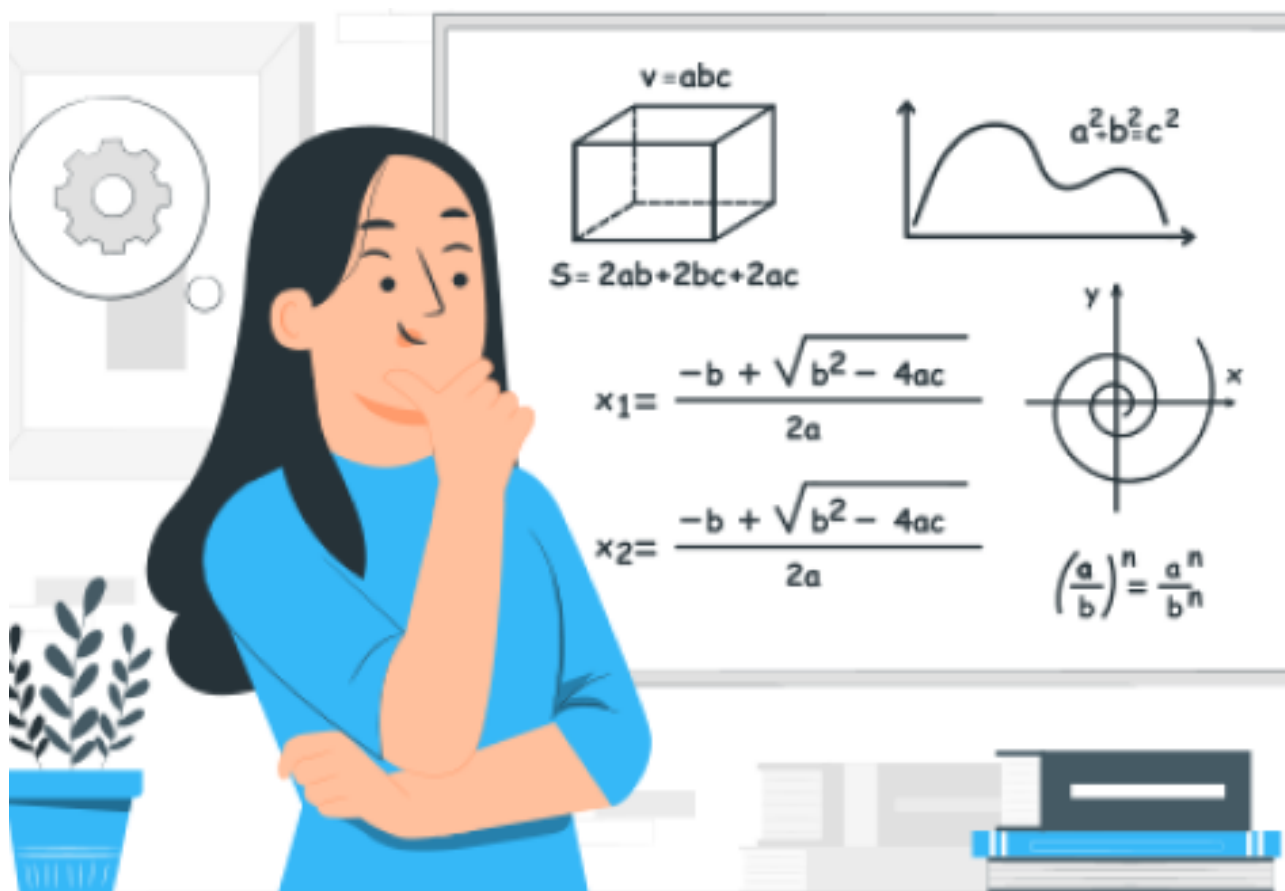




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Andrei
Bud

§1 Soluții

Problema 1

Aflați câte perechi de numere întregi (x, y) verifică ecuația

$$2(x^2 + y^2) + x + y = 5xy.$$

Demonstrație. Vom rescrie ecuația ca diferență de pătrate.

$$2(x^2 + y^2) + x + y = 5xy$$

$$2x^2 + x - 5xy + 2y^2 + y = 0.$$

$$2x^2 + x(1 - 5y) + 2y^2 + y = 0 \quad / \cdot 8$$

$$16x^2 + 2 \cdot 4x \cdot (1 - 5y) + (1 - 5y)^2 - (1 - 5y)^2 + 16y^2 + 8y = 0.$$

$$(4x + 1 - 5y)^2 - 1 + 10y - 25y^2 + 16y^2 + 8y = 0.$$

$$(4x + 1 - 5y)^2 - 9y^2 + 18y - 1 = 0.$$

$$(4x + 1 - 5y)^2 - (3y - 3)^2 = -8.$$

$$(4x - 5y + 1 + 3y - 3)(4x - 5y + 1 - 3y + 3) = -8.$$

$$(4x - 2y - 2)(4x - 8y + 4) = -8 \quad / : 8.$$

$$(2x - y - 1)(x - 2y + 1) = -1.$$

Sunt două cazuri de analizat.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} 2x - y - 1 = 1 \\ x - 2y + 1 = -1 \end{cases} &\implies \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x - 2(2x - 2) = -2 \end{cases} \implies x = 2, y = 2. \\ \bullet \quad \begin{cases} 2x - y - 1 = -1 \\ x - 2y + 1 = 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x \\ x - 2(2x) = 0 \end{cases} \implies x = 0, y = 0. \end{aligned}$$

Perechile de numere întregi care verifică ecuația sunt

$$(x, y) \in \{(0, 0), (2, 2)\},$$

prin urmare, numărul perechilor este egal cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ 5p

□

Problema 2

Pentru câte valori ale numărului natural prim p , numărul $2p + 1$ este cub perfect?

Demonstrație. Presupunem că

$$2p + 1 = k^3,$$

unde $k \in \mathbb{N}$. Atunci

$$2p = k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1).$$

Observăm că

$$k - 1 < k^2 + k + 1 \quad \text{pentru orice } k \geq 2.$$

Cum p este număr prim și $k^2 + k + 1$ este număr impar, rezultă că numărul $k - 1$ este 2, adică $k = 3$ și

$$k^2 + k + 1 = 13,$$

de unde

$$2p = 26 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 13.$$

Prin urmare, singurul număr prim pentru care $2p + 1$ este cub perfect este

$$p = 13.$$

Numărul valorilor lui p este egal cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5p

□

Problema 3

Care este cel mai mare număr de drepte determinate de vârfurile unui cub, astfel încât oricare două dintre ele să nu se intersecteze?

Demonstrație. Considerăm un cub și notăm vârfurile sale. Observăm că orice dreaptă determinată de două vârfuri ale cubului este fie o muchie, fie o diagonală de față, fie o diagonală a cubului. Pentru ca două drepte să nu se intersecteze, ele nu trebuie să aibă niciun punct comun și nici să fie coplanare cu punct de intersecție în interiorul cubului. Alegem patru drepte, fiecare fiind o diagonală a unei fețe a cubului, astfel încât aceste fețe să fie distincte și să nu aibă muchii comune. În acest mod, cele patru drepte nu se intersectează două câte două. Arătăm că nu se pot alege mai mult de patru astfel de drepte. Într-adevăr, orice a cincea dreaptă determinată de vârfurile cubului va intersecta cel puțin una dintre cele patru alese anterior, deoarece va avea un vârf comun sau va fi situată într-un plan care determină un punct de intersecție. Prin urmare, numărul maxim de drepte determinate de vârfurile unui cub, două câte două neintersectate, este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ 5p

□

Problema 4

Să se determine valoarea absolută a numărului $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația

$$2026 \cdot |x - 2| + (x - 2)^2 = a + 4$$

are exact o soluție reală.

Demonstrație. Notăm

$$t = x - 2.$$

Ecuația devine

$$2026|t| + t^2 = a + 4.$$

Observăm că dacă t este soluție, atunci și $-t$ este soluție, deoarece

$$|-t| = |t| \quad \text{și} \quad (-t)^2 = t^2.$$

Prin urmare, pentru ca ecuația să aibă o singură soluție reală, trebuie ca ele să coincidă, adică $t = 0$. În acest caz, obținem

$$2026 \cdot 0 + 0^2 = a + 4,$$

de unde

$$a + 4 = 0 \iff a = -4.$$

Ecuația dată are exact o soluție reală dacă și numai dacă $a = -4$, deci valoarea absolută a numărului a este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ 5p

□

Problema 5

Se dau numerele prime a și b . Să se determine suma acestor numere știind că ele verifică inegalitatea

$$16 \cdot 4^a + \frac{2^{2b}}{64} \leq 2^{a+b}.$$

Demonstrație. Observăm că

$$16 \cdot 4^a = 2^4 \cdot 2^{2a} = 2^{2a+4}, \quad \frac{2^{2b}}{64} = \frac{2^{2b}}{2^6} = 2^{2b-6}.$$

Astfel, inegalitatea devine

$$2^{2a+4} + 2^{2b-6} \leq 2^{a+b}.$$

Aplicăm inegalitatea dintre mediile aritmetică și geometrică:

$$2^{2a+4} + 2^{2b-6} \geq 2\sqrt{2^{2a+4} \cdot 2^{2b-6}} = 2 \cdot 2^{a+b-1} = 2^{a+b}.$$

Prin urmare, avem

$$2^{2a+4} + 2^{2b-6} \geq 2^{a+b}.$$

Comparând cu inegalitatea dată, rezultă că are loc egalitatea în inegalitatea mediilor, deci

$$2^{2a+4} = 2^{2b-6}.$$

De aici obținem

$$2a + 4 = 2b - 6 \iff b = a + 5.$$

Observăm că, pentru orice număr prim impar $a \geq 3$, numărul $a + 5$ este par, deci nu poate fi prim. Prin urmare, singura posibilitate este ca $a = 2$. Atunci $b = a + 5 = 7$, care este număr prim. Suma celor două numere este $a + b = 2 + 7 = \boxed{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{9}$ 5p

□

Problema 6

Fie

$$n = (10 + 1) (10^2 + 1) (10^4 + 1) (10^8 + 1) (10^{16} + 1).$$

Aflați suma cifrelor numărului n .

Demonstrație. Înmulțim pe n cu $10 - 1 = 9$:

$$9n = n(10 - 1) = (10 - 1)(10 + 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1).$$

Grupăm factorii astfel

$$(10 - 1)(10 + 1) = 10^2 - 1,$$

deci

$$9n = (10^2 - 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1).$$

Dar

$$(10^2 - 1)(10^2 + 1) = 10^4 - 1,$$

așadar

$$9n = (10^4 - 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1).$$

Continuând la fel,

$$(10^4 - 1)(10^4 + 1) = 10^8 - 1,$$

$$(10^8 - 1)(10^8 + 1) = 10^{16} - 1,$$

$$(10^{16} - 1)(10^{16} + 1) = 10^{32} - 1.$$

Prin urmare,

$$9n = 10^{32} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n = \frac{10^{32} - 1}{9}.$$

Numărul $\frac{10^{32} - 1}{9}$ este

$$\underbrace{11 \dots 1}_{32 \text{ cifre}},$$

deci suma cifrelor lui n este

$$1 + 1 + \dots + 1 = \boxed{32}.$$

Răspuns corect: $\boxed{32}$ 5p

□

Problema 7

Determinați care este numărul perechilor de numere reale (x, y) , care sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x^{2025} + 28 + 3y^2 - 18y = 0, \\ x^{2026}(y^2 + 9) = 6y. \end{cases}$$

Demonstrație. Rescriem prima ecuație:

$$x^{2025} + 3y^2 - 18y + 28 = 0.$$

Observăm că

$$3y^2 - 18y + 27 = 3(y - 3)^2,$$

deci

$$x^{2025} + 1 + 3(y - 3)^2 = 0.$$

Cum

$$3(y - 3)^2 \geq 0,$$

rezultă

$$x^{2025} + 1 \leq 0 \iff x^{2025} \leq -1 \iff x \leq -1.$$

Din a doua ecuație avem

$$x^{2026} (y^2 + 9) = 6y.$$

Observăm că

$$y^2 + 9 > 0 \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R},$$

deci putem scrie

$$x^{2026} = \frac{6y}{y^2 + 9}.$$

Știm că

$$\left| \frac{6y}{y^2 + 9} \right| \leq 1 \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R},$$

de unde rezultă

$$x^{2026} \leq 1.$$

Cum $x^{2026} \geq 0$, obținem

$$0 \leq x^{2026} \leq 1 \iff |x| \leq 1.$$

Din $x \leq -1$ și $|x| \leq 1$ rezultă $x = -1$.

Înlocuim $x = -1$ în a doua ecuație:

$$(-1)^{2026} (y^2 + 9) = 6y \iff y^2 + 9 = 6y,$$

adică

$$y^2 - 6y + 9 = 0 \iff (y - 3)^2 = 0.$$

Rezultă $y = 3$. Numărul perechilor de numere reale care sunt soluții ale sistemului este 1.

Răspuns corect: 1 5p

□

Problema 8

Se consideră expresia

$$E(a, b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2},$$

unde a și b sunt numere reale strict pozitive. Determinați cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea $E(a, b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b .

Demonstrație. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2} \geq n$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 + 2 + \frac{16ab}{a^2 + b^2} \geq n \quad | -10$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{16ab}{a^2 + b^2} - 8 \geq n - 10$$

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{16ab - 8a^2 - 8b^2}{a^2 + b^2} \geq n - 10$$

$$\begin{aligned}\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} - 8 \cdot \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2} &\geq n - 10 \\ \frac{(a - b)^2(a + b)^2}{a^2 b^2} - 8 \cdot \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2} &\geq n - 10 \\ (a - b)^2 \left(\frac{(a + b)^2}{a^2 b^2} - \frac{8}{a^2 + b^2} \right) &\geq n - 10 \\ (a - b)^2 \cdot \frac{(a + b)^2(a^2 + b^2) - 8a^2 b^2}{a^2 b^2(a^2 + b^2)} &\geq n - 10\end{aligned}$$

Cum

$$(a + b)^2 \geq 4ab \quad \text{și} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

rezultă

$$(a + b)^2(a^2 + b^2) \geq 8a^2 b^2,$$

de unde membrul stâng este nenegativ, deci

$$n - 10 \leq 0 \implies n \leq 10.$$

Pentru $a = b$ se obține egalitate, astfel că cel mai mare număr real care verifică inegalitatea este 10.

Răspuns corect: 10 5p

□

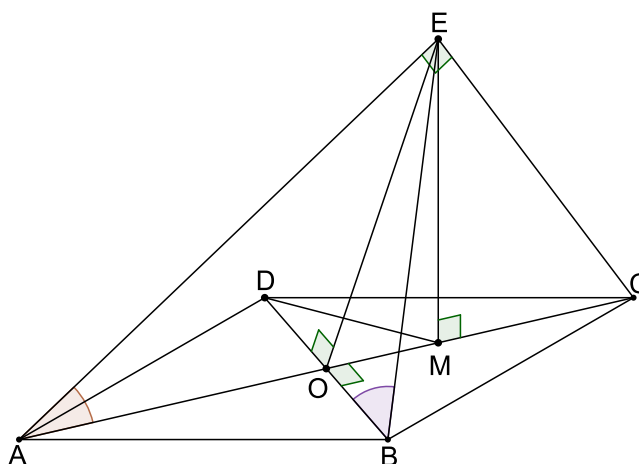
Problema 9

Se consideră pătratul $ABCD$, $AB = 10$, $AC \cap BD = \{O\}$ și E un punct în exteriorul planului $(ABCD)$. Proiecția punctului E pe planul $(ABCD)$ este punctul M , care se află în interiorul diagonalei AC , $M \neq O$. Se știe că

$$AE \perp CE, \quad \angle EBD = 2\angle CAE.$$

Lungimea segmentului DM este egală cu a . Care este valoarea pătratului numărului a ?

Demonstrație.



1. Determinarea lui EO . Din $AE \perp CE$ rezultă că triunghiul AEC este dreptunghic în E , deci AC este ipotenuza lui. Într-un pătrat cu latura 10, diagonala este $AC = 10\sqrt{2}$. Cum O

este intersecția diagonalelor, rezultă că O este mijlocul lui AC , adică $AO = CO = \frac{AC}{2}$. Într-un triunghi dreptunghic, mijlocul ipotenuzei este egal depărtat de cele trei vârfuri, deci

$$EO = AO = CO = \frac{AC}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

În plus, deoarece diagonalele pătratului sunt egale, avem și

$$BD = AC = 10\sqrt{2} \iff OB = OD = \frac{BD}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Prin urmare,

$$OE = OB.$$

2. Unghiul $\angle EBO$. Vom arăta că $EO \perp BD$. Deoarece $EM \perp (ABCD)$, rezultă că EM este perpendiculară pe orice dreaptă din planul $(ABCD)$, în particular pe BD , deci

$$EM \perp BD.$$

Într-un pătrat, diagonalele sunt perpendiculare, adică $MO \perp BD$. Cum atât EM , cât și MO sunt perpendiculare pe BD , rezultă că $BD \perp (EMO)$, deci

$$EO \perp BO,$$

deci triunghiul EOB este dreptunghic în O . Dar am arătat că $OE = OB$, așadar triunghiul dreptunghic EOB este isoscel, deci

$$\angle EBO = 45^\circ.$$

Din ipoteză $\angle EBD = 2\angle CAE$ obținem

$$2\angle CAE = 45^\circ \iff \angle CAE = 22^\circ 30'.$$

3. Unghiul $\angle EOC$. Din $AO = EO$ (ambele egale cu $\frac{AC}{2}$) rezultă că triunghiul $\triangle AOE$ este isoscel, deci

$$\angle OAE = \angle OEA.$$

Prin urmare,

$$\angle AOE = 180^\circ - 2\angle CAE.$$

Cum A, O, C sunt coliniare și semidreptele (OA) și (OC) sunt opuse, rezultă că

$$\angle EOC = 180^\circ - \angle EOA.$$

$$\angle EOC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle CAE) = 2\angle CAE.$$

Cum $2\angle CAE = 45^\circ$, obținem

$$\angle EOC = 45^\circ.$$

4. Determinarea lui OM și a lui DM . Cum $EM \perp (ABCD)$ și $OM \subset (ABCD)$, obținem

$$EM \perp OM,$$

adică triunghiul $\triangle EOM$ este dreptunghic în M . Cum $\angle EOM = 45^\circ$, rezultă că triunghiul $\triangle EOM$ este dreptunghic isoscel, deci

$$OM = EM = \frac{EO}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5.$$

Triunghiul $\triangle DOM$ este dreptunghic în O , iar

$$DO = \frac{BD}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $\triangle DOM$, obținem

$$a^2 = DM^2 = DO^2 + OM^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2 = 50 + 25 = \boxed{75}.$$

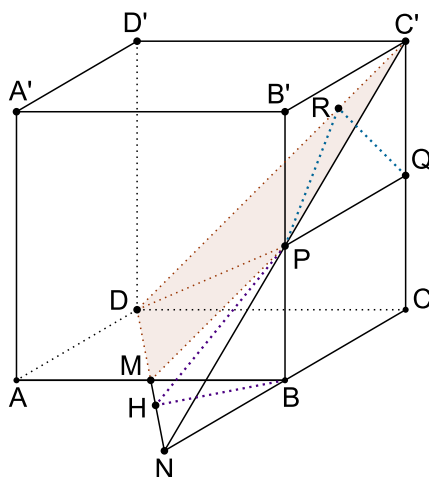
Răspuns corect: $\boxed{75}$ 5p

□

Problema 10

În cubul $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 6$ cm, se consideră punctul M , mijlocul segmentului AB . Aria secțiunii determinată de planul (DMC') în cub este numărul rațional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Determinați valoarea sumei $a + b$.

Demonstrație.



1. Determinarea secțiunii. În planul bazei $(ABCD)$, notăm $\{N\} = DM \cap BC$. Cum $DM \subset (DMC')$, rezultă că $N \in (DMC')$. Cum $BC \subset (BCC')$, rezultă că $N \in (BCC')$. Așadar, dreapta NC' este intersecția celor două plane:

$$NC' = (DMC') \cap (BCC').$$

Notăm $\{P\} = NC' \cap BB'$. Prin urmare, secțiunea planului (DMC') cu cubul este patrulaterul $DMPC'$.

2. Poziția punctelor N și P .

- *Determinarea lui N .* Deoarece $AD \parallel BC$, rezultă că triunghiurile dreptunghice $\triangle DAM$ și $\triangle NBM$ sunt asemenea. Atunci,

$$\frac{AD}{BN} = \frac{AM}{BM} = 1 \implies BN = AD = 6$$

Cum $BC = 6$, iar N se află pe prelungirea lui BC dincolo de B , obținem

$$CN = BC + BN = 6 + 6 = 12.$$

- *Determinarea lui P.* Deoarece $BC \parallel B'C'$, rezultă că triunghiurile dreptunghice $\triangle NBP$ și $\triangle C'B'P$ sunt asemenea. Atunci,

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{NB}{C'B'} = 1 \implies BP = PB' = \frac{BB'}{2} = 3$$

deci P este mijlocul lui BB' .

3. Aria triunghiului DMP . În triunghiul dreptunghic ADM , aplicăm teorema lui Pitagora:

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \iff DM = 3\sqrt{5}.$$

Notăm cu H piciorul perpendicularei din B pe DM .

$$\left. \begin{array}{l} PB \perp (ABCD), \\ BH \perp DM, H \in DM \\ BH, DM \subset (ABCD) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3P} PH \perp DM.$$

Calculăm BH din aria triunghiului BDM :

$$S_{\triangle BDM} = \frac{BM \cdot AD}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

Dar

$$S_{\triangle BDM} = \frac{DM \cdot BH}{2},$$

de unde

$$BH = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

În triunghiul dreptunghic PBH , aplicăm teorema lui Pitagora

$$PH^2 = PB^2 + BH^2 = 9 + \frac{36}{5} = \frac{81}{5} \iff PH = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Astfel,

$$S_{\triangle DMP} = \frac{DM \cdot PH}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{27}{2}.$$

4. Aria triunghiului DPC' . Fața $DCC'D'$ este un pătrat de latură 6, iar DC' este diagonala sa și atunci $DC' = 6\sqrt{2}$. Proiecția lui P pe fața $DCC'D'$ este punctul Q , mijlocul lui CC' . Notăm cu R piciorul perpendicularei din Q pe DC' .

$$\left. \begin{array}{l} PQ \perp (DCC'D'), \\ QR \perp DC', R \in DC' \\ QR, DC' \subset (DCC'D') \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3P} PR \perp DC'.$$

În pătratul $DCC'D'$, diagonala face un unghi de 45° cu laturile, prin urmare în triunghiul dreptunghic isoscel QRC' obținem

$$QR = \frac{QC'}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

În triunghiul dreptunghic PQR aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 = 36 + \frac{9}{2} = \frac{81}{2} \implies PR = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Prin urmare,

$$S_{\triangle DPC'} = \frac{DC' \cdot PR}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}}}{2} = 27.$$

5. Aria secțiunii.

$$S_{DMPC'} = S_{\triangle DMP} + S_{\triangle DPC'} = \frac{27}{2} + 27 = \frac{81}{2}.$$

Valoarea sumei $a + b$ este egală cu $81 + 2 = \boxed{83}$.

Răspuns corect: $\boxed{83}$ 5p

□

Problema 11

Câte soluții reale are ecuația

$$\left[\frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} \right] = 5x - 2?$$

Am notat cu $[t]$ partea întreagă a numărului t .

Demonstrație. Observăm că

$$\frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + 2x}{x^2 + 1} = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Deoarece 2 este întreg, rezultă

$$\left[\frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} \right] = \left[2 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right] = 2 + \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right].$$

Ecuația devine

$$2 + \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = 5x - 2,$$

adică

$$\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = 5x - 4.$$

Mai întâi, estimăm fracția:

$$(x - 1)^2 \geq 0 \iff x^2 + 1 \geq 2x \iff \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1,$$

$$(x + 1)^2 \geq 0 \iff x^2 + 1 \geq -2x \iff \frac{2x}{x^2 + 1} \geq -1.$$

Prin urmare,

$$-1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1,$$

deci

$$\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] \in \{-1, 0, 1\}.$$

Astfel, trebuie să avem $5x - 4 \in \{-1, 0, 1\}$, ceea ce conduce la cazurile:

- $\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = 0$. Atunci $5x - 4 = 0$, deci $x = \frac{4}{5}$. Verificare:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{16}{25} + 1} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{41}{25}} = \frac{40}{41} \in (0, 1),$$

deci $x = \frac{4}{5}$ este soluție.

- $\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = 1$. Atunci $5x - 4 = 1$, deci $x = 1$. Verificare:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1,$$

deci $x = 1$ este soluție.

- $\left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = -1$. Atunci $5x - 4 = -1$, deci $x = \frac{3}{5}$. Verificare:

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{25} + 1} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{34}{25}} = \frac{15}{17} \in (0, 1),$$

deci partea întreagă este 0, nu -1 , așadar $x = \frac{3}{5}$ nu este soluție.

Prin urmare, mulțimea soluțiilor este $S = \left\{ \frac{4}{5}, 1 \right\}$, iar numărul soluțiilor este $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ 5p

□

Problema 12

Numerele reale a și b , $a < b$ sunt soluții ale ecuației

$$|a - b - 2| - a^2 = \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{3}.$$

Care este valoarea expresiei $3b - 2a$?

Demonstrație. $a < b \implies a - b < 0 \implies a - b - 2 < 0 \implies |a - b - 2| = b - a + 2$. Atunci,

$$|a - b - 2| - a^2 = \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{3} \iff$$

$$b - a + 2 - a^2 = \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{3} \iff$$

$$a^2 + a + b^2 - \frac{4b}{3} + \frac{25}{36} = 0 \iff$$

$$a^2 + a + \frac{1}{4} + b^2 - \frac{4b}{3} + \frac{4}{9} = 0 \iff$$

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\implies a = -\frac{1}{2} \text{ și } b = \frac{2}{3}$$

Valoarea expresiei $3b - 2a$ este egală cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ 5p

□

Problema 13

Care este cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care există exact o sută de numere naturale nenule k cu proprietatea: $2 \leq \frac{n}{k} \leq 10$?

Demonstrație. Notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x , adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x . De asemenea, notăm cu $\lceil x \rceil$ cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu x .

Inegalitatea

$$2 \leq \frac{n}{k} \leq 10$$

este echivalentă cu

$$\frac{n}{10} \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

Numărul de valori naturale nenule k care satisfac condiția este

$$N = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil + 1.$$

Condiția problemei devine

$$N = 100 \iff \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil = 99.$$

Scriem

$$n = 10q + r, \quad r \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Atunci

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{10q + r}{2} \right\rceil = 5q + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil,$$

iar

$$\left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil = \begin{cases} q, & r = 0, \\ q + 1, & r \geq 1. \end{cases}$$

Dacă $r = 0$, atunci

$$5q - q = 99 \Rightarrow 4q = 99,$$

ceea ce este imposibil. Pentru $r \geq 1$ obținem

$$5q + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil - (q + 1) = 99 \iff 4q + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil = 100.$$

Prin urmare, $100 - \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$ trebuie să fie divizibil cu 4. Cum $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, rezultă că $\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \in \{0, 4\}$. Analizăm următoarele cazuri

- *Cazul 1:* $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor = 0$. Atunci $r = 1$ și

$$4q = 100 \Rightarrow q = 25,$$

de unde

$$n = 10 \cdot 25 + 1 = 251.$$

- *Cazul 2:* $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor = 4$. Atunci $r \in \{8, 9\}$ și

$$4q = 96 \Rightarrow q = 24,$$

de unde

$$n \in \{248, 249\}.$$

Prin urmare, cea mai mare valoare posibilă este $\boxed{251}$.

Răspuns corect: $\boxed{251}$ 5p
□

Problema 14

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D și E astfel încât

$$BD = EC = 2 \cdot DE.$$

Fie M mijlocul segmentului AD , $BM \cap AE = \{P\}$, $CM \cap AE = \{Q\}$. Se construiesc RM și TD perpendiculare pe planul (ABC) , de aceeași parte a acestuia, astfel încât

$$TD = 2 \cdot RM.$$

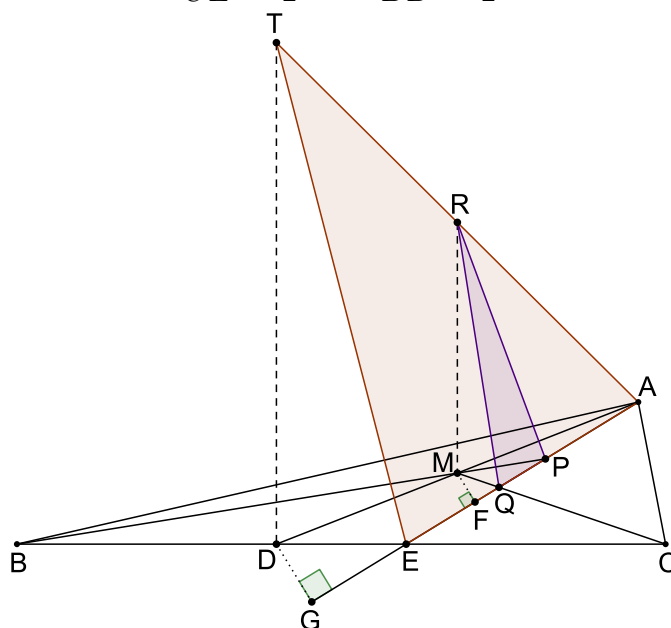
Raportul dintre aria triunghiului PRQ și aria triunghiului ETA are valoarea $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Aflați $a \cdot b$.

Demonstrație. Notăm $DE = x$. Atunci

$$BD = EC = 2x, \quad CD = DE + EC = 3x, \quad BE = BD + DE = 3x,$$

deci

$$\frac{CD}{CE} = \frac{3}{2}, \quad \frac{BE}{BD} = \frac{3}{2}.$$



I. Determinăm raportul $\frac{PQ}{AE}$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ADE pentru transversala MQC (punctele $M \in AD$, $Q \in AE$, $C \in DE$). Obținem:

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{EQ}{QA} = 1.$$

Cum M este mijlocul lui AD , avem $\frac{AM}{MD} = 1$, iar $\frac{CD}{CE} = \frac{3}{2}$, deci

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{EQ}{QA} = 1 \implies \frac{EQ}{QA} = \frac{2}{3}.$$

Notăm $EQ = 2y$ și $QA = 3y$. Atunci,

$$AE = AQ + QE = 3y + 2y = 5y. \quad (1)$$

Aplicăm acum teorema lui Menelaus în triunghiul ADE pentru transversala BMP (punctele $B \in DE$, $M \in AD$, $P \in AE$). Rezultă:

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{DM}{MA} = 1.$$

Dar $\frac{DM}{MA} = 1$ și $\frac{BE}{BD} = \frac{3}{2}$, deci

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{3}{2} = 1 \implies \frac{AP}{PE} = \frac{2}{3} \implies \frac{AP}{AE} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

Din (1) rezultă:

$$AP = \frac{2AE}{5} = \frac{2 \cdot 5y}{5} = 2y. \quad (2)$$

Din (2) rezultă:

$$PQ = AQ - AP = 3y - 2y = y,$$

deci

$$\frac{PQ}{AE} = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}. \quad (3)$$

II. Determinăm raportul distanțelor la dreapta AE . Fie G piciorul perpendicularei din D pe AE și F piciorul perpendicularei din M pe AE , adică $DG \perp AE$ și $MF \perp AE$. În triunghiul dreptunghic ADG , punctul M este mijlocul lui AD , iar $MF \parallel DG$ (ambele sunt perpendiculare pe AE), deci MF este linie mijlocie. Prin urmare,

$$\frac{MF}{DG} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Din enunț avem $TD = 2 \cdot RM$, deci

$$\frac{RM}{TD} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Distanța de la R la dreapta AE este ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele RM și MF , iar distanța de la T la dreapta AE este ipotenuza triunghiului dreptunghic cu catetele TD și DG . Din (4) și (5) rezultă că aceste două triunghiuri sunt asemenea, deci

$$\frac{d(R, AE)}{d(T, AE)} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

III. Raportul ariilor. Triunghiurile PRQ și ETA au bazele pe aceeași dreaptă AE : baza lui PRQ este PQ , iar baza lui ETA este AE . Prin urmare,

$$\frac{[PRQ]}{[ETA]} = \frac{PQ}{AE} \cdot \frac{d(R, AE)}{d(T, AE)}.$$

Folosind (3) și (6), obținem:

$$\frac{[PRQ]}{[ETA]} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Așadar, $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$, deci

$$a \cdot b = 10.$$

Răspuns corect: 10 5p

□

Problema 15

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 2026\}$. Care este numărul maxim de submulțimi ale lui A ce pot fi alese, astfel încât intersecția oricăror două submulțimi distincte să aibă exact 2024 elemente?

Demonstrație. Fie X și Y două submulțimi ale lui $A = \{1, 2, \dots, 2026\}$ cu proprietatea că $|X \cap Y| = 2024$. Cum $|X \cap Y| \leq |X|$, rezultă că fiecare submulțime aleasă are cardinalul cel puțin 2024.

- Dacă una dintre submulțimi are cardinalul 2024, atunci din mulțimea A lipsesc exact două elemente, fie acestea u și v . În plus, pentru oricare altă submulțime aleasă pe care o notăm cu Y , cum $|X \cap Y| = 2024 = |X|$, înseamnă că X este o submulțime proprie a lui Y . Atunci, oricare Y care îl conține pe X poate fi numai una dintre mulțimile:

$$X, \quad X \cup \{u\}, \quad X \cup \{v\}, \quad X \cup \{u, v\} = A.$$

Prin urmare, în acest caz putem alege cel mult 4 submulțimi.

- Dacă una dintre submulțimi este chiar mulțimea A , atunci, pentru orice altă submulțime X cu proprietatea cerută, $X \neq A$, avem $|A \cap X| = |X| = 2024$, deci toate celelalte submulțimi ar avea exact 2024 elemente. Dar două submulțimi distincte cu câte 2024 elemente nu pot avea intersecția de 2024 elemente (altfel ar fi una inclusă în cealaltă, deci ar fi egale), așadar, numărul maxim de submulțimi ar fi 2.
- Am demonstrat că, în situația în care selectăm o submulțime de 2024 elemente sau una de 2026 elemente, numărul maxim de submulțimi care verifică cerința este mic. Este evident că nu putem alege submulțimi de cardinal mai mic decât 2024. Putem alege toate submulțimile de cardinal 2025 și acestea verifică condiția problemei. Orice submulțime de cardinal 2025 este de forma $A \setminus \{a\}$, unde $a \in A$. Adică, oricare ar fi X și Y de cardinal 2025, acestea diferă prin exact un element și intersecția lor are 2024 elemente. Pentru a obține submulțimile de cardinal 2025 eliminăm, pe rând, câte un element din mulțimea A , iar acest lucru se poate face în 2026 de moduri.

Prin urmare, numărul maxim de submulțimi ale lui A ce pot fi alese, astfel încât intersecția oricăror două submulțimi distincte să aibă exact 2024 elemente este 2026.

Răspuns corect: 2026 5p

□

Problema 16

Care este suma numerelor naturale de două cifre $\overline{ab}$, care verifică relația

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 18(a + b)^2?$$

Demonstrație. Scriem relația folosind cifrele a și b :

$$(10a + b)(10b + a) = 18(a + b)^2.$$

Dezvoltând, obținem:

$$100ab + 10a^2 + 10b^2 + ab = 18(a^2 + 2ab + b^2),$$

adică:

$$101ab + 10a^2 + 10b^2 = 18a^2 + 36ab + 18b^2.$$

Mutând termenii, rezultă:

$$65ab = 8(a^2 + b^2).$$

Deoarece $(65, 8) = 1$, rezultă că

$$a^2 + b^2 \text{ este multiplu de } 65 \quad \text{și} \quad ab \text{ este multiplu de } 8.$$

Cum a și b sunt cifre, avem

$$a^2 + b^2 \leq 9^2 + 9^2 = 162,$$

iar multiplii lui 65 mai mici sau egali cu 162 sunt 65 și 130. Dar egalitatea $a^2 + b^2 = 130$ nu este posibilă pentru cifre, deoarece suma pătratelor a două cifre nu poate fi 130. Prin urmare,

$$a^2 + b^2 = 65$$

are următoarele soluții în cifre:

$$(a, b) \in \{(1, 8), (8, 1), (4, 7), (7, 4)\}.$$

Verificăm acum a doua condiție, anume că ab trebuie să fie multiplu de 8.

- Pentru $(a, b) = (1, 8)$ sau $(8, 1)$ obținem $ab = 8$, care este multiplu de 8, deci aceste valori sunt admise.
- Pentru $(a, b) = (4, 7)$ sau $(7, 4)$ avem $ab = 28$, care nu este multiplu de 8, deci aceste valori nu verifică condiția impusă de relația inițială.

Prin urmare, singurele soluții sunt

$$\overline{ab} = 18 \quad \text{și} \quad \overline{ab} = 81.$$

Suma numerelor naturale de două cifre $\overline{ab}$ este egală cu $18 + 81 = \boxed{99}$.

Răspuns corect: $\boxed{99}$ 5p

□

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: 20p

Total: 100p

Timp de lucru: 3 ore