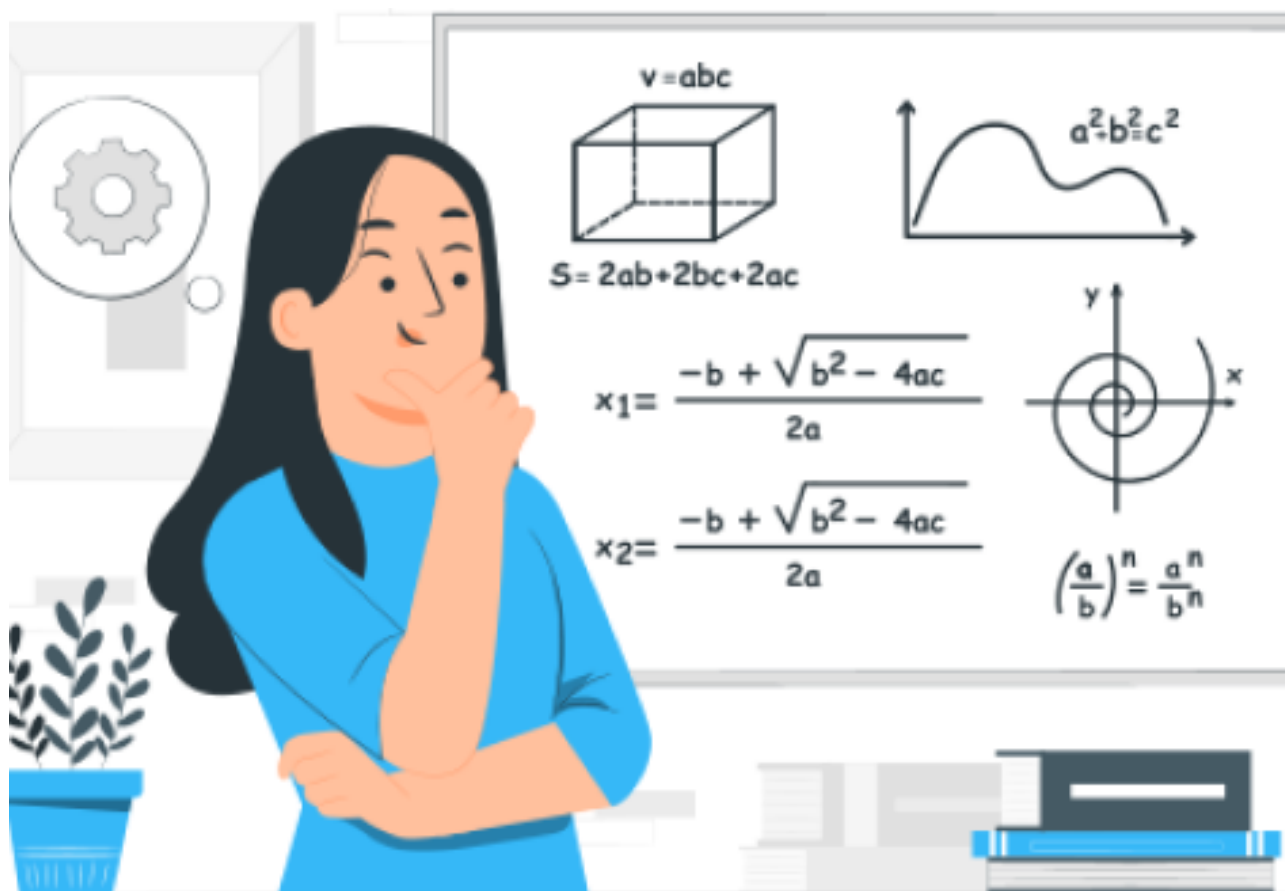




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Andrei
Bud

§1 Subiecte

Problema 1

Aflați câte perechi de numere întregi (x, y) verifică ecuația

$$2(x^2 + y^2) + x + y = 5xy.$$

Problema 2

Pentru câte valori ale numărului natural prim p , numărul $2p + 1$ este cub perfect?

Problema 3

Care este cel mai mare număr de drepte determinate de vârfurile unui cub, astfel încât oricare două dintre ele să nu se intersecteze?

Problema 4

Să se determine valoarea absolută a numărului $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația

$$2026 \cdot |x - 2| + (x - 2)^2 = a + 4$$

are exact o soluție reală.

Problema 5

Se dau numerele prime a și b . Să se determine suma acestor numere știind că ele verifică inegalitatea

$$16 \cdot 4^a + \frac{2^{2b}}{64} \leq 2^{a+b}.$$

Problema 6

Fie

$$n = (10 + 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1)(10^{16} + 1).$$

Aflați suma cifrelor numărului n .

Problema 7

Determinați care este numărul perechilor de numere reale (x, y) , care sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x^{2025} + 28 + 3y^2 - 18y = 0, \\ x^{2026}(y^2 + 9) = 6y. \end{cases}$$

Problema 8

Se consideră expresia

$$E(a, b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2 + b^2},$$

unde a și b sunt numere reale strict pozitive. Determinați cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea $E(a, b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a și b .

Problema 9

Se consideră pătratul $ABCD$, $AB = 10$, $AC \cap BD = \{O\}$ și E un punct în exteriorul planului $(ABCD)$. Proiecția punctului E pe planul $(ABCD)$ este punctul M , care se află în interiorul diagonalei AC , $M \neq O$. Se știe că

$$AE \perp CE, \quad \angle EBD = 2\angle CAE.$$

Lungimea segmentului DM este egală cu a . Care este valoarea pătratului numărului a ?

Problema 10

În cubul $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 6$ cm, se consideră punctul M , mijlocul segmentului AB . Aria secțiunii determinată de planul (DMC') în cub este numărul rațional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Determinați valoarea sumei $a + b$.

Problema 11

Câte soluții reale are ecuația

$$\left[\frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} \right] = 5x - 2?$$

Am notat cu $[t]$ partea întreagă a numărului t .

Problema 12

Numerele reale a și b , $a < b$ sunt soluții ale ecuației

$$|a - b - 2| - a^2 = \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{3}.$$

Care este valoarea expresiei $3b - 2a$?

Problema 13

Care este cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care există exact o sută de numere naturale nenule k cu proprietatea: $2 \leq \frac{n}{k} \leq 10$?

Problema 14

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D și E astfel încât

$$BD = EC = 2 \cdot DE.$$

Fie M mijlocul segmentului AD , $BM \cap AE = \{P\}$, $CM \cap AE = \{Q\}$. Se construiesc RM și TD perpendiculare pe planul (ABC) , de aceeași parte a acestuia, astfel încât

$$TD = 2 \cdot RM.$$

Raportul dintre aria triunghiului PRQ și aria triunghiului ETA are valoarea $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Aflați $a \cdot b$.

Problema 15

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 2026\}$. Care este numărul maxim de submulțimi ale lui A ce pot fi alese, astfel încât intersecția oricăror două submulțimi distincte să aibă exact 2024 elemente?

Problema 16

Care este suma numerelor naturale de două cifre $\overline{ab}$, care verifică relația

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 18(a + b)^2?$$

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: $20p$

Total: $100p$

Timp de lucru: 3 ore