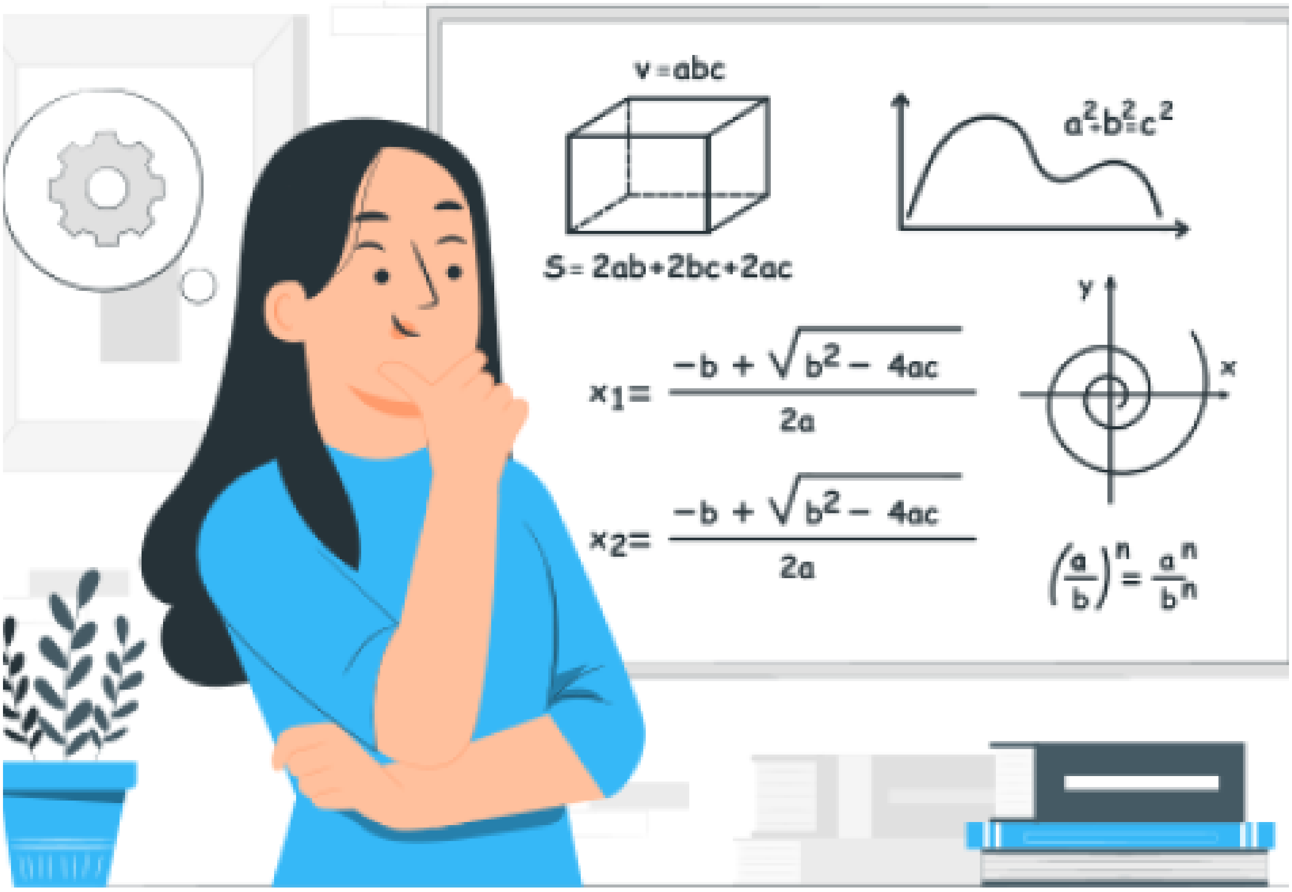


# Concursul de matematică Upper.School
# Ediția 2025-2026

## Etapa II
## Clasa a VIII-a

## - Subiecte -

**Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Adrian Bud**

# §1 Subiecte

**Problema 1**

Aflați câte perechi de numere întregi $(x, y)$ verifică ecuația

$$2\left(x^2+y^2\right)+x+y=5xy.$$

**Problema 2**

Pentru câte valori ale numărului natural prim $p$, numărul $2p+1$ este cub perfect?

**Problema 3**

Care este cel mai mare număr de drepte determinate de vârfurile unui cub, astfel încât oricare două dintre ele să nu se intersecteze?

**Problema 4**

Să se determine valoarea absolută a numărului $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația

$$2026 \cdot |x-2|+(x-2)^2=a+4$$

are exact o soluție reală.

**Problema 5**

Se dau numerele prime $a$ și $b$. Să se determine suma acestor numere știind că ele verifică inegalitatea

$$16 \cdot 4^a+\frac{2^{2b}}{64} \leq 2^{a+b}.$$

**Problema 6**

Fie

$$n=(10+1)\left(10^2+1\right)\left(10^4+1\right)\left(10^8+1\right)\left(10^{16}+1\right).$$

Aflați suma cifrelor numărului $n$.

**Problema 7**

Determinați care este numărul perechilor de numere reale $(x, y)$, care sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x^{2025}+28+3y^2-18y=0, \\ x^{2026}\left(y^2+9\right)=6y. \end{cases}$$

**Problema 8**

Se consideră expresia

$$E(a,b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2+b^2},$$

unde $a$ și $b$ sunt numere reale strict pozitive. Determinați cel mai mare număr real $n$ pentru care inegalitatea $E(a,b) \geq n$ are loc, oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a$ și $b$.

**Problema 9**

Se consideră pătratul $ABCD$, $AB = 10$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $E$ un punct în exteriorul planului $(ABC)$. Proiecția punctului $E$ pe planul $(ABCD)$ este punctul $M$, care se află în interiorul diagonalei $AC$, $M \neq O$. Se știe că

$$AE \perp CE, \quad \angle EBD = 2\angle CAE.$$

Lungimea segmentului $DM$ este egală cu $a$. Care este valoarea pătratului numărului $a$?

**Problema 10**

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6$ cm, se consideră punctul $M$, mijlocul segmentului $AB$. Aria secțiunii determinată de planul $(DMC')$ în cub este numărul rațional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a,\ b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Determinați valoarea sumei $a + b$.

**Problema 11**

Câte soluții reale are ecuația

$$\left[\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}\right] = 5x - 2?$$

Am notat cu $[t]$ partea întreagă a numărului $t$.

**Problema 12**

Numerele reale $a$ și $b$, $a < b$ sunt soluții ale ecuației

$$|a-b-2| - a^2 = \left(b - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{3}.$$

Care este valoarea expresiei $3b - 2a$?

**Problema 13**

Care este cea mai mare valoarea a numărului natural $n$ pentru care există exact o sută de numere naturale nenule $k$ cu proprietatea: $2 \leq \frac{n}{k} \leq 10$?

**Problema 14**

Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ se consideră punctele $D$ și $E$ astfel încât

$$BD = EC = 2 \cdot DE.$$

Fie $M$ mijlocul segmentului $AD$, $BM \cap AE = \{P\}$, $CM \cap AE = \{Q\}$. Se construiesc $RM$ și $TD$ perpendiculare pe planul $(ABC)$, de aceeași parte a acestuia, astfel încât

$$TD = 2 \cdot RM.$$

Raportul dintre aria triunghiului $PRQ$ și aria triunghiului $ETA$ are valoarea $\frac{a}{b}$, unde $a$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Aflați $a \cdot b$.

**Problema 15**

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 2026\}$. Care este numărul maxim de submulțimi ale lui $A$ ce pot fi alese, astfel încât intersecția oricăror două submulțimi distincte să aibă exact 2024 elemente?

**Problema 16**

Care este suma numerelor naturale de două cifre $\overline{ab}$, care verifică relația

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 18(a + b)^2?$$

**Problemele 1-16:** . . . . . . . . . . $16 \times 5p = 80p$
**Puncte acordate din oficiu:** . . . . . . . . . . $20p$
**Total:** . . . . . . . . . . $100p$

**Timp de lucru:** . . . . . . . . . . 3 ore