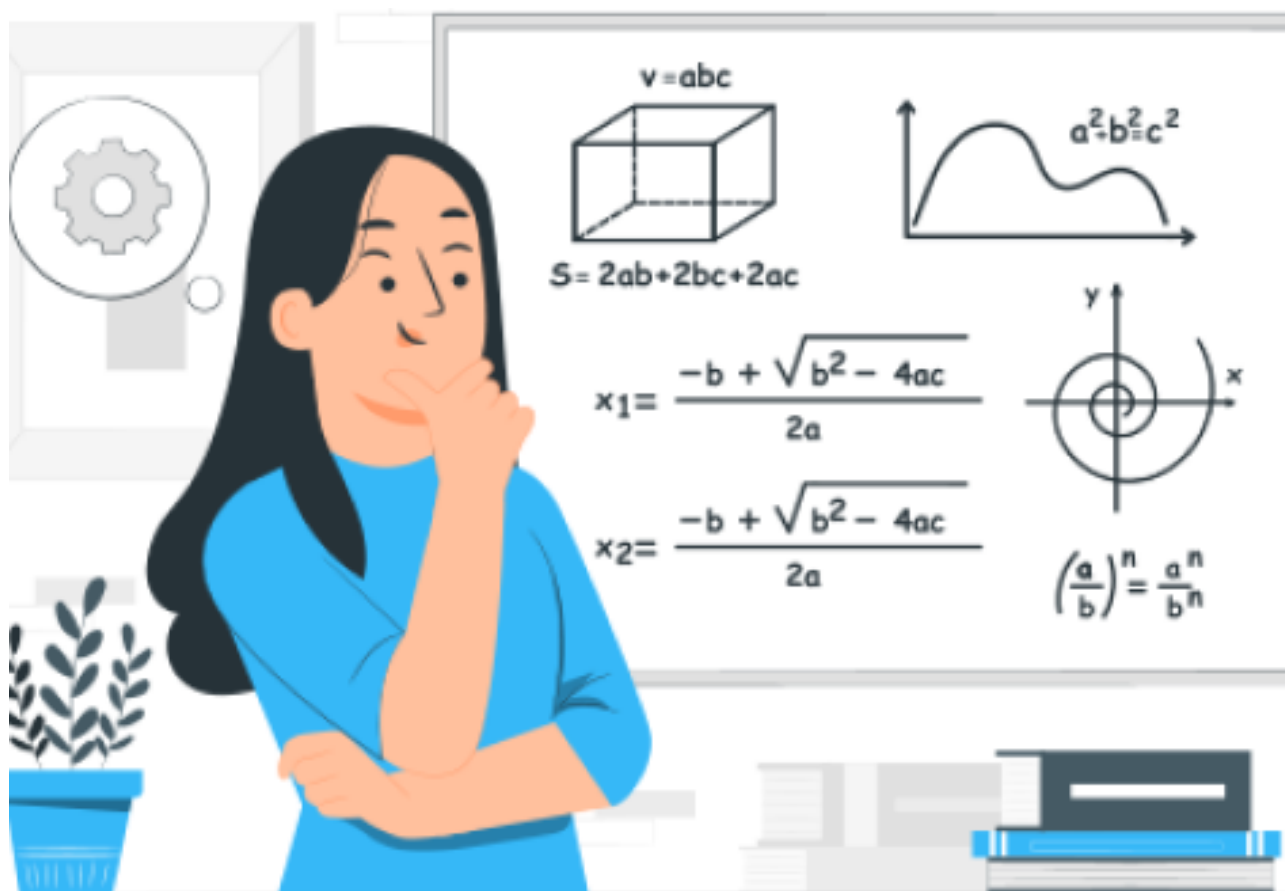




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, George Ioan Stoica

§1 Soluții

Problema 1

Un număr de 7 cifre $\overline{abcdefg}$ se numește *echilibrat* dacă are proprietățile:

- Cifrele a, b, c, d, e, f, g sunt distincte și nenule;
- $a > b > c < d < e < f < g$.

- Care este cel mai mic număr *echilibrat*? Dar cel mai mare?
- Câte astfel de numere există?

Demonstrație.

- Cel mai mic număr *echilibrat* este format din cele mai mici 7 cifre nenule în care cifra c este cea mai mică, deci este 3214567. Cel mai mare număr *echilibrat* are cea mai mare valoare pe poziția lui a , următoarea cea mai mare posibilă pe poziția lui b , cifra c este cea mai mică dintre toate cele 7 cifre ale numărului, iar următoarele 4 sunt ordonate crescător. Prin urmare, cel mai mare număr *echilibrat* este 9834567.
- Dorim să formăm un astfel de număr folosind 7 cifre distincte din mulțimea

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Mai întâi alegem cele 7 cifre care vor apărea în număr. Este mai ușor să numărăm câte perechi de cifre eliminăm din cele 9 cifre nenule.

Prima cifră eliminată poate fi aleasă în 9 moduri, iar a doua în 8 moduri. Obținem astfel $9 \cdot 8$ alegeri. Dar fiecare pereche de cifre a fost numărată de două ori, deoarece ordinea nu contează. De exemplu, perechea (2, 5) este aceeași cu perechea (5, 2). Prin urmare, numărul de moduri în care eliminăm două cifre este

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Deci există 36 moduri de a alege cele 7 cifre ale numărului.

Fixăm un astfel de grup de 7 cifre distincte. Deoarece ele trebuie să satisfacă relația

$$a > b > c < d < e < f < g,$$

rezultă că cifra c trebuie să fie mai mică decât toate celelalte șase cifre. Așadar, c este cea mai mică dintre cele 7 cifre alese. După ce am așezat cea mai mică cifră pe poziția c , rămân 6 cifre mai mari decât ea. Dintre acestea alegem care două vor sta în pozițiile a și b , adică trebuie să aflăm în câte moduri putem alege două cifre din cele 6 care au rămas. La fel ca mai sus, o cifră poate fi aleasă în 6 moduri, a doua în 5, fiecare pereche se numără astfel de două ori, deci rezultatul este $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Celelalte patru cifre rămase se așază apoi în mod unic pe pozițiile d, e, f, g , în ordine strict crescătoare. Prin urmare, numărul total de numere cerute este $36 \cdot 15 = 540$.

Barem:

- a) Scrie corect cel mai mic număr echilibrat 1p

- Scrie corect cel mai mare număr echilibrat ... 1p
- b) Determină numărul de moduri de a alege cele 7 cifre dintre cele 9 cifre nenule ... 2p
- Observă că cifra c este cea mai mică dintre cele 7 cifre alese și alege corect cifrele de pe pozițiile a și b ... 2p
- Determină numărul total de numere echilibrate ... 1p

□

Problema 2

Să se demonstreze că dintre oricare 10 numere naturale consecutive mai mari sau egale cu 2, există cel puțin unul care are toți divizorii primi mai mari sau egali cu 11.

Marius Mîinea

Demonstrație. Considerăm 10 numere naturale consecutive.

- Dintre oricare 6 numere consecutive, exact 2 nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3. Prin urmare, dintre 10 numere consecutive există cel puțin 3 numere care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3. Le notăm $a < b < c$. Atunci a, b, c sunt toate impare și nu sunt divizibile cu 3.
- Arătăm că dintre ele cel mult unul este divizibil cu 5. Într-adevăr, dacă două dintre ele ar fi divizibile cu 5, atunci diferența lor ar fi multiplu de 5. Dar diferența a două numere impare este pară, deci ar fi multiplu de 10. Cum toate trei se află într-un interval de lungime 9, acest lucru este imposibil. Deci cel mult unul dintre a, b, c este divizibil cu 5.
- Analog, dintre a, b, c cel mult unul este divizibil cu 7. Într-adevăr, dacă două dintre ele ar fi divizibile cu 7, atunci diferența lor ar fi multiplu de 7. Fiind diferența a două numere impare, ea ar fi pară, deci cel puțin 14, imposibil într-un interval de lungime 9.

Rezultă că dintre cele trei numere a, b, c , cel mult unul este divizibil cu 5 și cel mult unul este divizibil cu 7. Prin urmare, cel puțin unul dintre ele nu este divizibil nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7. Deci există cel puțin un număr dintre cele 10 care are toți divizorii primi mai mari sau egali cu 11.

Barem:

- Observă că dintre oricare 6 numere consecutive, exact două nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3 ... 2p
- Concluzionează că dintre cele 10 numere consecutive există cel puțin 3 numere care nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3 ... 2p
- Demonstrează că dintre aceste 3 numere cel mult unul este divizibil cu 5 ... 1p
- Demonstrează că dintre aceste 3 numere cel mult unul este divizibil cu 7 ... 1p
- Concluzionează că există un număr care nu este divizibil nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 și are toți divizorii primi mai mari sau egali cu 11 ... 1p

□

Problema 3

O broscuță se află la baza unei scări cu 10 trepte. Ea poate urca scara folosind două tipuri de sărituri:

- a) O săritură mică, urcând exact **o treaptă**.
- b) O săritură mare, urcând exact **două trepte** deodată.

În câte moduri diferite poate broscuța să ajungă exact pe treapta a 10-a?

Observație: Ordinea săriturilor contează (de exemplu, $1 + 2$ este diferit de $2 + 1$).

Demonstrație. Pentru a ajunge pe treapta 1 există o singură variantă, o săritură mică, pentru a ajunge pe treapta 2 sunt două variante: să sară de pe treapta 1 sau direct de la bază. În general, pentru a sări pe treapta n , broscuța are două variante: să sară de pe treapta $n - 1$ cu o săritură mică sau de pe treapta $n - 2$ cu o săritură mare. Pentru a afla în câte moduri poate să ajungă pe treapta n , trebuie să adunăm numărul de drumuri de la bază până la treapta $n - 2$ cu numărul de drumuri de la bază la treapta $n - 1$. Fie F_n numărul de moduri în care se poate ajunge pe treapta n . Pentru a ajunge pe treapta n , ultima săritură a broscuței a fost fie de pe treapta $n - 1$ (o săritură de o treaptă), fie de pe treapta $n - 2$ (o săritură de două trepte). Prin urmare, relația prin care putem calcula numărul de drumuri este

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Cu valorile inițiale:

- $F_1 = 1$ (Varianta: $\{1\}$)
- $F_2 = 2$ (Variantele: $\{1, 1\}, \{2\}$)

Calculând succesiv termenii:

$$\begin{aligned} F_3 &= 1 + 2 = 3 \\ F_4 &= 2 + 3 = 5 \\ F_5 &= 3 + 5 = 8 \\ F_6 &= 5 + 8 = 13 \\ F_7 &= 8 + 13 = 21 \\ F_8 &= 13 + 21 = 34 \\ F_9 &= 21 + 34 = 55 \\ F_{10} &= 34 + 55 = 89 \end{aligned}$$

Răspuns: Broscuța poate urca scara în **89** de moduri diferite.

Barem:

- Demonstrează $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ sau obține o relație echivalentă 5p
- Calculează corect F_{10} 2p

□

Problema 4

Spunem că un număr natural este *curios* dacă atât suma cifrelor sale, cât și suma cifrelor succesorului său sunt divizibile cu 11.

- a) Determinați cel mai mic număr *curios*.
- b) Demonstrați că există o infinitate de numere *curioase*.

Demonstrație.

a) Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n . Fie n un număr curios. Atunci

$$11 \mid s(n) \quad \text{și} \quad 11 \mid s(n+1).$$

Pasul 1. Dacă ultima cifră a lui n este cel mult 8, atunci

$$s(n+1) = s(n) + 1.$$

În acest caz, dacă $s(n)$ este divizibil cu 11, atunci $s(n+1)$ nu mai este divizibil cu 11, ceea ce este imposibil. Prin urmare, ultima cifră a lui n este 9.

Pasul 2. Dacă penultima cifră a lui n este cel mult 8, iar ultima cifră este 9, atunci

$$s(n+1) = s(n) + 1 - 9 = s(n) - 8.$$

Diferența dintre $s(n)$ și $s(n+1)$ este 8, care nu este multiplu de 11, ceea ce contrazice faptul că ambele sunt divizibile cu 11. Deci și penultima cifră a lui n este 9.

Pasul 3. Presupunem că ultimele p cifre ale lui n sunt egale cu 9, iar cifra imediat precedentă este diferită de 9. Atunci, la trecerea de la n la $n+1$, cele p cifre 9 devin 0, iar cifra precedentă crește cu 1. Prin urmare,

$$s(n+1) = s(n) + 1 - 9p.$$

Rezultă că

$$s(n) - s(n+1) = 9p - 1.$$

Deoarece $s(n)$ și $s(n+1)$ sunt multipli de 11, diferența lor trebuie să fie multiplu de 11, deci

$$11 \mid (9p - 1).$$

Cel mai mic p cu această proprietate este $p = 5$, deoarece

$$9 \cdot 5 - 1 = 44,$$

care este multiplu de 11. Prin urmare, orice număr curios se termină în cinci cifre 9.

Pasul 4. Scriem

$$n = m \cdot 10^5 + 99999,$$

unde ultima cifră a lui m este diferită de 9. Atunci

$$s(n) = s(m) + 45.$$

Pentru ca $s(n)$ să fie divizibil cu 11, trebuie ca

$$11 \mid s(m) + 45.$$

Deoarece $45 = 11 \cdot 4 + 1$, rezultă

$$s(m) = \mathcal{M}_{11} + 10.$$

Cea mai mică valoare posibilă pentru $s(m)$ este 10. Cel mai mic număr natural m , cu ultima cifră diferită de 9 și cu suma cifrelor egală cu 10, este $m = 28$. Astfel,

$$n = 28 \cdot 10^5 + 99999 = 2\,899\,999.$$

Verificăm:

$$s(2\,899\,999) = 2 + 8 + 5 \cdot 9 = 55,$$

care este divizibil cu 11, iar

$$n + 1 = 2\,900\,000, \quad s(2\,900\,000) = 2 + 9 = 11,$$

care este de asemenea divizibil cu 11. Prin urmare, cel mai mic număr curios este

$$\boxed{2\,899\,999}.$$

b) Din raționamentul de mai sus rezultă că orice număr curios are forma

$$n = m \cdot 10^5 + 99999,$$

unde ultima cifră a lui m este diferită de 9 și

$$11 \mid s(n), \quad 11 \mid s(n + 1).$$

Dar

$$s(n) = s(m) + 45, \quad s(n + 1) = s(m + 1).$$

Dacă ultima cifră a lui m este diferită de 9, atunci

$$s(m + 1) = s(m) + 1.$$

Așadar, este suficient să alegem m astfel încât

$$s(m) = 10.$$

În acest caz,

$$s(n) = 10 + 45 = 55,$$

care este divizibil cu 11, iar

$$s(n + 1) = s(m + 1) = s(m) + 1 = 11,$$

care este tot divizibil cu 11. Acum alegem, pentru orice $q \geq 1$,

$$m = 2 \cdot 10^q + 8.$$

Atunci ultima cifră a lui m este 8, deci este diferită de 9, iar

$$s(m) = 2 + 8 = 10.$$

Rezultă că, pentru orice $q \geq 1$, numărul

$$n = (2 \cdot 10^q + 8) \cdot 10^5 + 99999$$

este curios. Prin urmare, există o infinitate de numere curioase.

Barem:

- a) Observă că ultima cifră a numărului *curios* trebuie să fie 9 ... 1p
- Generalizează și arată că numărul trebuie să se termine în 5 cifre de 9 ... 1p
- Determină forma numerelor *curioase* și condiția necesară pentru suma cifrelor părții din față ... 2p
- Scrie corect cel mai mic număr *curios* ... 1p
- b) Construiește corect o familie infinită de numere *curioase* ... 2p

□

Problemele 1-4: $4 \times 7p = 28p$ **Puncte acordate din oficiu:** 0p**Total:** 28p**Timp de lucru:** 3 ore