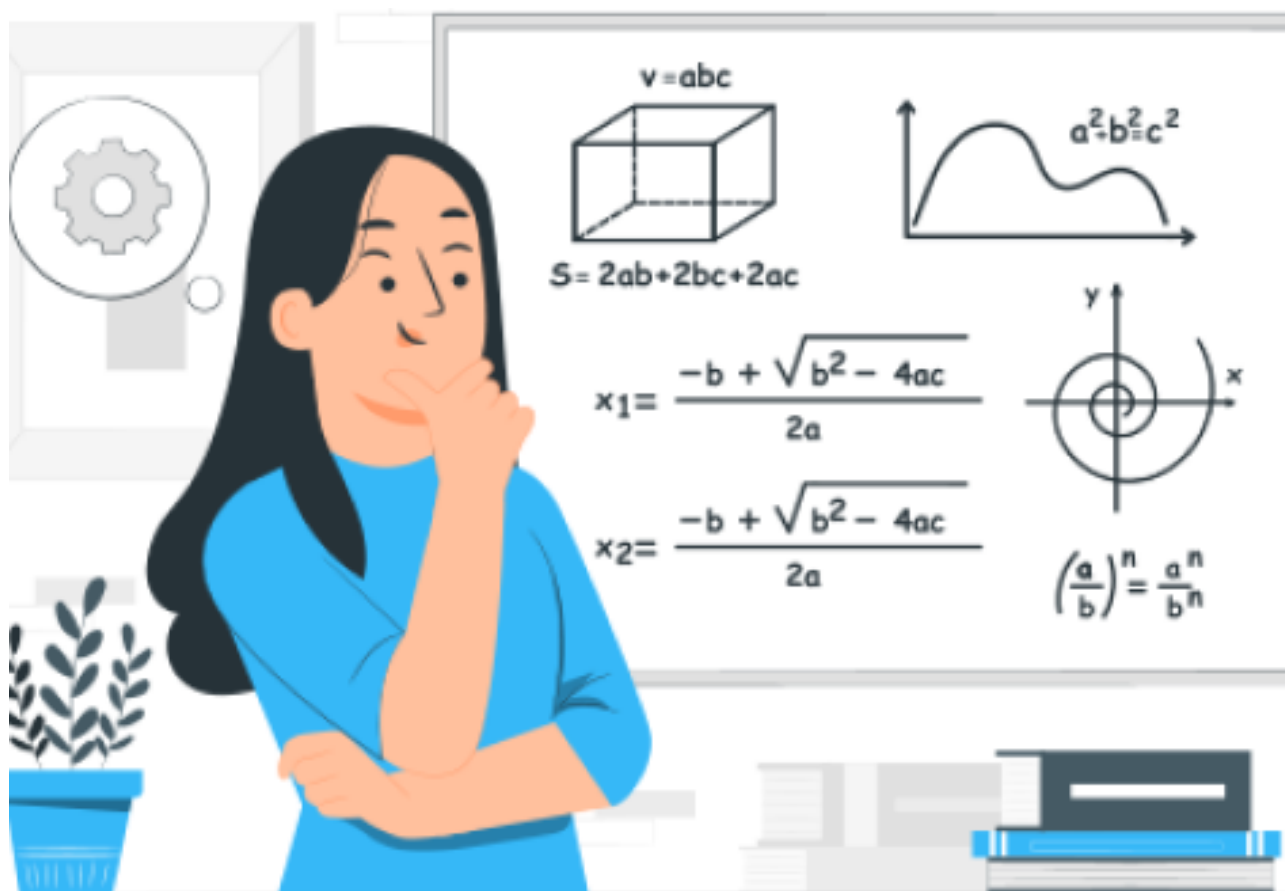




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, George Ioan Stoica

§1 Soluții

Problema 1

Rezolvați în mulțimea numerelor prime ecuația $2^m + 3^n + 2 \cdot r^2 = 7^p$.

Radu Tănăsescu, Târgu Jiu

Demonstrație. Analizăm resturile la împărțirea cu 8 a fiecărui termen din ecuație și, ținând cont și de faptul că singurul număr prim par este 2, avem că:

- $2^m = \mathcal{M}_8 + 4$, pentru $m = 2$ și $2^m = \mathcal{M}_8$, pentru $m \geq 3$;
- $3^n = \mathcal{M}_8 + 1$, pentru $n = 2$ și $3^n = \mathcal{M}_8 + 3$, pentru n impar;
- $r^2 = 4$ dacă $r = 2$, iar $r^2 = \mathcal{M}_4 + 1$, pentru r impar, drept urmare $2r^2 = \mathcal{M}_8$, dacă $r = 2$ și $2r^2 = \mathcal{M}_8 + 2$, dacă r este impar;
- $7^p = \mathcal{M}_8 + 1$, pentru $p = 2$ și $7^p = \mathcal{M}_8 + 7$, pentru p impar;

Considerăm cazuri în funcție de valoarea lui p :

- **Cazul 1.** Dacă p este impar, atunci, folosind observația de mai sus, singurele două moduri de a scrie $7^p = \mathcal{M}_8 + 7$ ca sumă de trei numere 2^m , 3^n și $2r^2$ sunt:

$$(\mathcal{M}_8 + 4) + (\mathcal{M}_8 + 3) + \mathcal{M}_8 = \mathcal{M}_8 + 7 \quad \text{și} \quad (\mathcal{M}_8 + 4) + (\mathcal{M}_8 + 1) + (\mathcal{M}_8 + 2) = \mathcal{M}_8 + 7.$$

În primul caz, avem $r = m = 2$, iar n este impar. Ecuația devine:

$$12 + 3^n = 7^p,$$

iar cum $12 = \mathcal{M}_3$ și $3^n = \mathcal{M}_3$ ($n \geq 1$), avem că $7^p = \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3$, imposibil.

În al doilea caz, avem $m = n = 2$, iar r este impar. Ecuația devine:

$$13 + 2 \cdot r^2 = 7^p,$$

dar atunci, cum $7^p = (6 + 1)^p = \mathcal{M}_3 + 1$, rezultă $2 \cdot r^2 = \mathcal{M}_3$, deci $r = \mathcal{M}_3$. Cum r este prim, obținem $r = 3$, adică $7^p = 13 + 2 \cdot 3^2 = 31$, deci nici în acest caz nu avem soluții.

- **Cazul 2.** Dacă $p = 2$, atunci ecuația devine

$$2^m + 3^n + 2 \cdot r^2 = 49,$$

deci $2r^2 \leq 49$, iar cum r este prim, $r \in \{2, 3\}$. Dacă $r = 2$, atunci $2^m + 3^n = 41$, de unde obținem soluția $m = 5$ și $n = 2$. Dacă $r = 3$, atunci $2^m + 3^n = 31$, de unde obținem soluția $m = 2$ și $n = 3$.

Prin urmare, numerele prime m, n, r, p care satisfac ecuația sunt:

$$(m, n, r, p) \in \{(2, 3, 3, 2), (5, 2, 2, 2)\}.$$

Barem:

- Determină resturile la împărțirea prin 8 ale termenilor din ecuație și separă cazurile după valoarea lui p $3p$
- Elimină cazul în care p este impar $2p$
- Tratează cazul $p = 2$ și determină corect cele două soluții posibile $2p$

□

Problema 2

Fie n un număr natural astfel încât $n + 1$ este divizibil cu 24. Demonstrați că suma tuturor divizorilor pozitivi ai lui n este divizibilă cu 24.

Demonstrație. Deoarece $n + 1 = \mathcal{M}_{24}$, atunci $n + 1 = \mathcal{M}_4$, deci $n = \mathcal{M}_4 + 3$. Prin urmare, n nu este pătrat perfect, deci are un număr par de divizori pozitivi. Acești divizori se pot grupa în perechi $\{a, b\}$ cu proprietatea că $ab = n$. Într-adevăr, considerând lista divizorilor în ordine crescătoare, putem să-i grupăm: primul cu ultimul, al doilea cu penultimul și așa mai departe, aceasta grupare fiind bine definită întrucât avem un număr par de divizori.

Vom arăta acum că fiecare astfel de pereche $\{a, b\}$ are suma divizibilă cu 24. De aici, va rezulta și că suma tuturor perechilor formate este divizibilă cu 24, adică suma tuturor divizorilor pozitivi este divizibilă cu 24, de unde rezultă concluzia.

Pentru a finaliza, demonstrăm că, dacă $ab = n$, atunci $a + b = \mathcal{M}_{24}$ în două moduri:

Metoda 1. Observăm că:

$$a + b = a + \frac{n}{a} = \frac{a^2 + n}{a},$$

iar cum a este relativ prim cu 24 (fiind divizor al lui n care este relativ prim cu 24), este suficient să arătăm că $a^2 + n = \mathcal{M}_{24}$, adică $a^2 = \mathcal{M}_{24} + 1$ (deoarece $n + 1 = \mathcal{M}_{24}$). Pentru asta, analizăm resturile unui pătrat perfect la împărțirea cu 3, respectiv 8:

- Cum $(a, 24) = 1$, rezultă că $(a, 3) = 1$, deci $a^2 = \mathcal{M}_3 + 1$, de unde $3 \mid (a^2 - 1)$.
- Cum $(a, 24) = 1$, rezultă că $(a, 2) = 1$, deci $a^2 = \mathcal{M}_8 + 1$, de unde $8 \mid (a^2 - 1)$.

Deoarece $3 \mid (a^2 - 1)$, $8 \mid (a^2 - 1)$, iar $(3, 8) = 1$, rezultă că $24 \mid (a^2 - 1)$, adică $a^2 = \mathcal{M}_{24} + 1$ și de aici concluzia.

Metoda 2. Vom arăta că $(a + 1)(b + 1) = \mathcal{M}_{24}$, ceea ce va implica, folosind faptul că $n + 1 = \mathcal{M}_{24}$:

$$a + b = (ab + a + b + 1) - (ab + 1) = (a + 1)(b + 1) - (n + 1) = \mathcal{M}_{24} - \mathcal{M}_{24} = \mathcal{M}_{24}.$$

Demonstrăm astfel că $(a + 1)(b + 1)$ este divizibil cu 3, respectiv 8:

- Cum $n + 1 = \mathcal{M}_{24}$, rezultă că $n + 1 = \mathcal{M}_3$, deci $n = \mathcal{M}_3 + 2$. Deci, $ab = n = \mathcal{M}_3 + 2$, iar atunci, unul dintre numerele a și b este $\mathcal{M}_3 + 2$, iar celălalt este $\mathcal{M}_3 + 1$. Astfel, unul dintre numerele $a + 1$ și $b + 1$ va fi $\mathcal{M}_3$, deci $(a + 1)(b + 1) = \mathcal{M}_3$.
- Cum $n + 1 = \mathcal{M}_{24}$, rezultă că $n + 1 = \mathcal{M}_8$, deci $n = \mathcal{M}_8 + 7$. Astfel, a și b sunt impare și nu este posibil ca ambele să fie $\mathcal{M}_4 + 1$, altfel am avea:

$$\mathcal{M}_4 + 3 = n = ab = (\mathcal{M}_4 + 1) \cdot (\mathcal{M}_4 + 1) = \mathcal{M}_4 + 1,$$

imposibil. Deci, unul dintre a și b va fi $\mathcal{M}_4 + 3$, iar astfel, unul dintre $a + 1$ și $b + 1$ va fi $\mathcal{M}_4$. Cum și celălalt număr este par, vom avea că $(a + 1)(b + 1) = \mathcal{M}_4 \cdot \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_8$.

Deoarece $3 \mid (a + 1)(b + 1)$, $8 \mid (a + 1)(b + 1)$, iar $(3, 8) = 1$, rezultă că $24 \mid (a + 1)(b + 1)$, iar concluzia urmează.

Barem:

- Arată că $n = \mathcal{M}_4 + 3$, deci n nu este pătrat perfect și divizorii pozitivi ai lui n se pot grupa în perechi $\{a, b\}$ cu $ab = n$ 1p

- Reduce demonstrația la faptul că pentru fiecare pereche de divizori $\{a, b\}$ cu $ab = n$ are loc $24 \mid (a + b) \dots \dots \dots 2p$
- Demonstrează că $a^2 = \mathcal{M}_{24} + 1 \dots \dots \dots 2p$
- Concluzionează că $a + b = \frac{a^2 + n}{a}$ este divizibil cu 24 $\dots \dots \dots 1p$
- Concluzionează că suma tuturor divizorilor pozitivi ai lui n este divizibilă cu 24 $\dots \dots 1p$

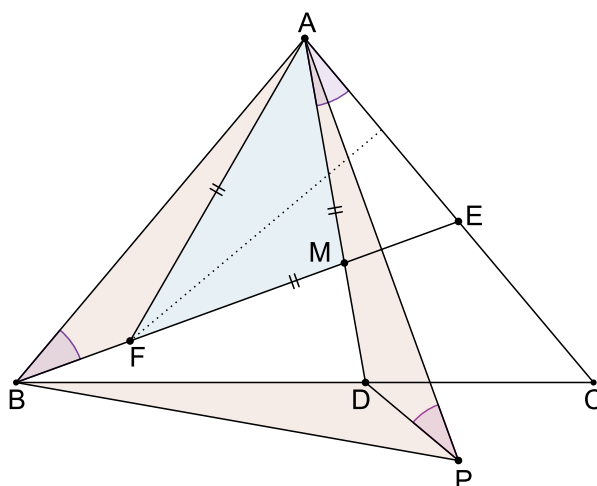
□

Problema 3

Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ isoscel, cu $AB = AC$ și $\angle BAC = 80^\circ$. Fie punctele D pe latura (BC) și E pe latura (AC) , astfel încât $\angle CAD = \angle ABE = 30^\circ$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE . Arătați că $ME = MD$.

Adrian Bud, Negrești-Oaș

Demonstrație. Deoarece triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel, avem $\angle ABC = \angle ACB = 50^\circ$, iar din triunghiul $\triangle BEA$ rezultă $\angle BEA = 70^\circ$. Notăm cu F intersecția dintre mediatoarea segmentului (AE) și dreapta BE .



Atunci triunghiul $\triangle FAE$ este isoscel și

$$\angle FAE = \angle FEA = 70^\circ, \angle AFE = 40^\circ, FA = FE. \quad (1)$$

Deoarece $\angle BAE > \angle FAE > \angle MAE$ rezultă că punctul F se găsește pe segmentul (BM) . Atunci,

$$\angle BAF = \angle BAE - \angle FAE = 10^\circ. \quad (2)$$

În triunghiul $\triangle ACD$ avem $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ$, de unde

$$\angle ADC = 100^\circ, \text{ iar } \angle ADB = 80^\circ.$$

În triunghiul $\triangle DAB$ avem $\angle DAB = 50^\circ = \angle DBA$, deci triunghiul $\triangle DAB$ este isoscel cu

$$DA = DB. \quad (3)$$

Construim triunghiul $\triangle ABP$ echilateral, cu P și C de aceeași parte față de AB . Atunci, din (3), obținem $\triangle PAD \equiv \triangle PBD$ (*L.L.L.*) rezultă

$$\angle APD = \angle BPD = \frac{\angle APB}{2} = 30^\circ. \quad (4)$$

Pe de altă parte,

$$\angle PAD = \angle PAB - \angle DAB = 10^\circ \quad (5)$$

Din $\triangle ABP$ triunghi echilateral și (2), (4), și (5) avem,

$$\left. \begin{array}{l} AB = AP \\ \angle BAF = \angle PAD = 10^\circ \\ \angle ABF = \angle APD = 30^\circ \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{U.L.U.} \triangle ABF \equiv \triangle APD,$$

de unde, împreună cu (1), obținem

$$AD = AF = FE. \quad (6)$$

Triunghiul $\triangle MAF$ având $\angle MAF = \angle DAB - \angle FAB = 40^\circ = \angle MFA$ este isoscel cu

$$MA = MF. \quad (7)$$

Din (6) și (7) rezultă $ME = FE - FM = AD - AM = MD$.

Barem:

- Determină unghiurile necesare din figură și introduce punctul F pe dreapta BE astfel încât $FA = FE$ 1p
- Arată că triunghiul $\triangle DAB$ este isoscel, deci $DA = DB$ 1p
- Construiește triunghiul echilateral $\triangle ADP$ și obține congruența triunghiurilor $\triangle PAD$ și $\triangle PBD$ 2p
- Demonstrează congruența triunghiurilor $\triangle ABF$ și $\triangle APD$ 1p
- Arată că triunghiul $\triangle MAF$ este isoscel, deci $MA = MF$ 1p
- Încheie prin relația $ME = FE - FM = AD - AM = MD$ 1p

□

Problema 4

Pentru orice număr natural $k \geq 3$, notăm cu $s(k)$ suma tuturor resturilor obținute prin împărțirea lui k la numerele $1, 2, 3, \dots, k-1$. De exemplu,

$$s(9) = 0 + 1 + 0 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 = 12.$$

a) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale k astfel încât

$$s(k-1) < s(k).$$

b) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale k astfel încât

$$s(k-1) = s(k).$$

Darius Hangan și Traian Danciu

Demonstrație. Pentru x, y numere naturale nenule, notăm cu $r(x, y)$ restul împărțirii lui x la y . Dacă $1 < b < a$ sunt două numere naturale, atunci când împărțim numerele consecutive a și $a + 1$ la b , avem două situații posibile:

- **Cazul 1.** Resturile sunt două numere consecutive, mai mici decât b , adică $r(a + 1, b) = r(a, b) + 1$
- **Cazul 2.** Restul împărțirii lui a la b este $b - 1$ (condiție echivalentă cu $b \mid a + 1$), iar restul împărțirii lui $a + 1$ la b este 0, adică $r(a, b) = b - 1$ și $r(a + 1, b) = 0$.

Vom rezolva problema folosind observația de mai sus:

a) Vom demonstra că toate numerele prime $k = p \geq 5$ satisfac condiția din enunț. Folosind notația din observație cu $a = p - 1$ și b parcurgând lista de numere $2, \dots, p - 2$, deducem că, de fiecare dată vom fi în primul caz. Într-adevăr, dacă am fi în al doilea caz, atunci vom avea că $a + 1 = (p - 1) + 1 = p$ dă restul 0 la împărțirea cu b , ceea ce implică $b \mid p$, imposibil pentru că p este prim și $1 < b < p$. Astfel, pentru orice $b \in \{2, \dots, p - 2\}$,

$$r(p - 1, b) + 1 = r(p, b).$$

De asemenea, $r(p - 1, 1) = r(p, 1) = 0$ și $r(p, p - 1) = 1$. Deci, $s(p) > s(p - 1)$, întrucât:

$$\begin{aligned} s(p) &= r(p, 1) + r(p, 2) + r(p, 3) + \dots + r(p, p - 1) \\ &= r(p - 1, 1) + (r(p - 1, 2) + 1) + (r(p - 1, 3) + 1) + \dots + (r(p - 1, p - 2) + 1) + 1 \\ &= (r(p - 1, 1) + r(p - 1, 2) + \dots + r(p - 1, p - 2)) + (p - 2) \\ &= s(p - 1) + (p - 2). \end{aligned}$$

Deoarece există o infinitate de numere prime $p \geq 5$, concluzia urmează.

b) Vom demonstra că toate numerele $k = 2^n$, cu $n \geq 3$ satisfac condiția din enunț. Așa cum am văzut la subpunctul a), în funcție de $b \in \{2, 3, \dots, 2^n - 1\}$, avem două cazuri:

- **Cazul 1.** $r(2^n, b) = r(2^n - 1, b) + 1$, pentru orice b astfel încât $b \nmid 2^n$, adică pentru orice $b \in \{2, 3, \dots, 2^n\} \setminus \{2^1, \dots, 2^{n-1}\}$. Deci, pentru aceste valori ale lui b , $r(2^n, b)$ este cu 1 mai mare decât $r(2^n - 1, b)$. Termenii lui $s(n)$ corespunzători împărțitorilor din acest caz sunt în total cu

$$(2^n - n - 2) \cdot 1 = 2^n - n - 2$$

mai mari decât termenii lui $s(n - 1)$ corespunzători aceluiași împărțitori (b poate lua exact $(2^n - 1) - (n - 1) = 2^n - n$ valori, iar pentru fiecare b , avem o diferență egală cu 1).

- **Cazul 2.** $r(2^n, b) = r(2^n - 1, b) - (b - 1)$, pentru orice b astfel încât $b \mid 2^n$, adică pentru orice $b \in \{2^1, \dots, 2^{n-1}\}$. Astfel, termenii lui $s(n)$ corespunzători împărțitorilor din acest caz sunt în total cu

$$\begin{aligned} (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \dots + (2^{n-1} - 1) &= (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (1 + 1 + \dots + 1) \\ &= (2^n - 2) - (n - 1) = 2^n - n - 1 \end{aligned}$$

mai mici decât termenii lui $s(n - 1)$ corespunzători aceluiași împărțitori.

Astfel, având în vedere că $s(n)$ mai conține și $r(2^n, 2^n - 1) = 1$, diferența dintre cele două sume este:

$$(2^n - n) - (2^n - n - 1) - 1 = 0,$$

drept urmare, pentru orice $k = 2^n$, $n \geq 2$, avem că $s(k - 1) = s(k)$. În concluzie, există o infinitate de valori ale lui k cu proprietatea din enunț.

Barem:

- Observă cele două situații posibile pentru resturile obținute la împărțire a două numere consecutive ... 1p
- a) Dă un exemplu corect ... 1p
- Demonstrează că exemplul este corect ... 2p
- b) Dă un exemplu corect ... 1p
- Demonstrează că exemplul este corect ... 2p

□

Problemele 1-4: ... $4 \times 7p = 28p$ **Puncte acordate din oficiu:** ... 0p**Total:** ... 28p**Timp de lucru:** ... 3 ore