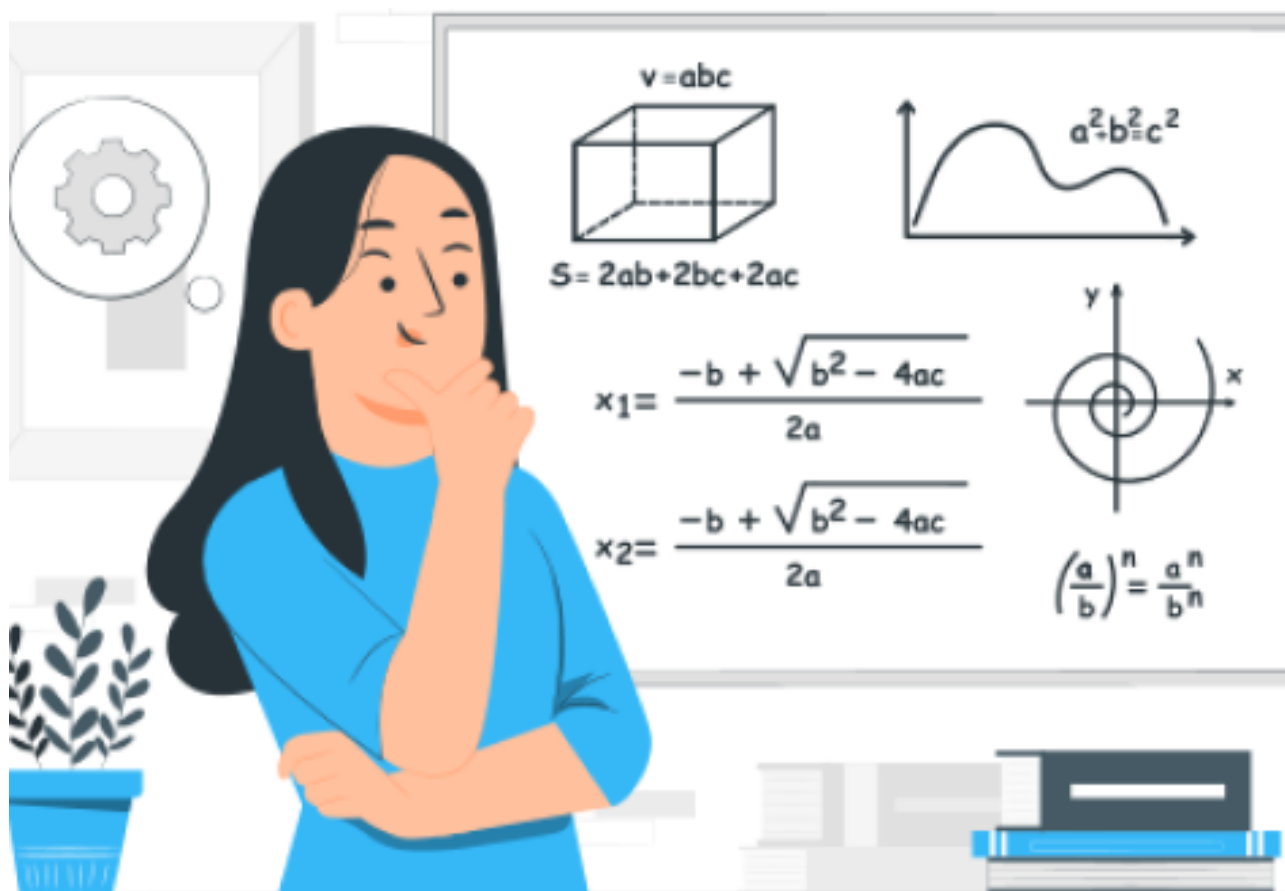




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa III
Clasa a VII-a

- Soluții -
Ana Boiangiu

sectionSoluții

Problema 1

Determinați toate perechile de numere naturale (m, n) cu proprietatea că

$$\lfloor \sqrt{m} \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \text{ divide } m + n + 2 \cdot \lfloor \sqrt{m} \rfloor \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Am notat cu $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului real x .

Ana Boiangiu

Demonstrație. Notăm $\lfloor \sqrt{m} \rfloor = x \in \mathbb{N}^*$ și $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = y \in \mathbb{N}^*$. Atunci putem scrie $m = x^2 + u$ și $n = y^2 + v$, unde $0 \leq u \leq 2x$ și $0 \leq v \leq 2y$ sunt numere naturale. Relația din ipoteză devine

$$x + y \mid (x^2 + y^2) + (u + v) + 2xy,$$

sau echivalent

$$x + y \mid u + v.$$

Cum

$$0 \leq u + v \leq 2(x + y),$$

avem $u + v = k(x + y)$ unde $0 \leq k \leq 2$ este natural.

- **Cazul I.** Dacă $u + v = 0$, avem $u = v = 0$, de unde

$$(m, n) = (x^2, y^2).$$

- **Cazul II.** Dacă $u + v = x + y$, obținem

$$(m, n) = (x^2 + u, y^2 + (x + y - u))$$

unde x, y sunt numere naturale, $0 \leq u \leq 2x$ și $0 \leq x + y - u \leq 2y$, sau $x - y \leq u \leq x + y$, adică

$$\max(0, x - y) < u \leq \min(2x, x + y).$$

- **Cazul III.** Dacă $u + v = 2(x + y)$, trebuie să avem $u = 2x$ și $v = 2y$, de unde

$$(m, n) = (x^2 + 2x, y^2 + 2y).$$

Barem:

- Scrie $m = x^2 + u, n = y^2 + v$ 1p
- Reducerea la $x + y \mid u + v$... 2p
- Tratarea primului caz ... 1p
- Tratarea celui de-al doilea caz (cu o parametrizare corectă a soluțiilor) ... 2p
- Tratarea celui de-al treilea caz ... 1p

□

Problema 2

Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$ și fie D și E proiecțiile vârfurilor B , respectiv C , pe bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$. Dreptele BE și CD se intersectează în S .

- Demonstrați că S se află pe bisectoarea exterioară a unghiului $\angle BAC$.
- Demonstrați că simetricul lui A față de S se află pe BC .

Ana Boiangiu

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $AB < AC$. Observăm în primul rând că

$$\angle BAD = \angle CAE, \quad \angle ADB = \angle AEC = 90^\circ,$$

de unde că $\triangle ABD \sim \triangle ACE$. În particular, deoarece $AB < AC$, avem și $AD < AE$.

a) Echivalent, avem de demonstrat că $AS \perp AD$, sau $AS \parallel BD$. Din reciproca teoremei lui Thales, acest paralelism se reduce la

$$\frac{SB}{SE} = \frac{AD}{AE}.$$

Dar $BD \parallel CE$ (ambele fiind perpendiculare pe AE), deci din teorema fundamentală a asemănării avem

$$\triangle SBD \sim \triangle SEC \implies \frac{SB}{SE} = \frac{BD}{CE}.$$

Așadar rămâne de demonstrat că

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE},$$

ceea ce rezultă din asemănarea $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.

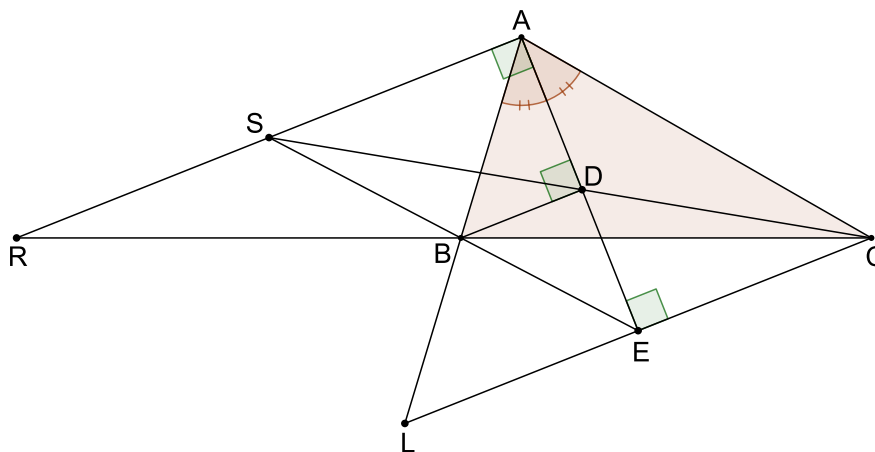
b) Fie R intersecția dintre AS și BC și fie L intersecția dintre CE și AB . Cum $AE \perp CL$ și $\angle LAE = \angle CAE$, triunghiul $\triangle LAC$ este isoscel și așadar $CE = LE$. Cum $AR \parallel LC$ din teorema fundamentală a asemănării deducem că

$$\triangle CEB \sim \triangle RSB, \quad \triangle LEB \sim \triangle ASB.$$

De aici

$$\frac{EB}{SB} = \frac{CE}{RS}, \quad \frac{EB}{SB} = \frac{LE}{AS}.$$

Cum $CE = LE$, avem $AS = RE$, de unde concluzia problemei.



Barem:

- **a)** Observația că $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ 1p
- Manipularea rapoartelor și finalizare ... 2p
- **b)** Construirea lui L și observația că $\triangle LAC$ este isoscel 2p
- Demonstrarea celor două asemănări 1p
- Finalizare 1p

□

Problema 3

Fie $n \geq 3$ un număr natural. Considerăm o tablă $n \times n$ în celulele căreia sunt scrise numere reale nenule. Se cunoaște că există un număr real k cu proprietatea că pentru orice număr m scris pe tablă, suma celorlalte $2n - 2$ numere situate în celulele de pe aceeași linie sau coloană cu acesta este egală cu $k \cdot m$. Aflați, în funcție de n , toate valorile posibile pentru k .

Tuymaada 2001

Demonstrație. Singurele valori posibile pentru k sunt $-2, n - 2$ și $2n - 2$. Demonstrăm că aceste valori verifică într-adevăr condiția problemei.

- Pentru $k = -2$, scriem $-(n - 1)$ pe diagonala principală și 1 în rest.
- Pentru $k = n - 2$, scriem $-(n - 1)$ în celulele din prima linie a tablei și 1 în rest.
- Pentru $k = 2n - 2$, scriem 1 în toate celulele tablei.

Presupunem acum că $k \neq -2$ și $k \neq n - 2$ și demonstrăm că trebuie să avem $k = 2n - 2$, ceea ce arată că singurele valori posibile pentru k sunt cele enunțate mai sus.

Notăm $k + 2 = m$, de unde $m \neq 0$ și $m \neq n$. Fie a_{ij} numărul înscris în celula situată la intersecția dintre linia i și coloana j . Fie S suma tuturor numerelor din tabel. Atunci din ipoteza problemei avem

$$ma_{pq} = (a_{1q} + a_{2q} + \cdots + a_{pq}) + (a_{p1} + a_{p2} + \cdots + a_{pn}).$$

pentru orice $1 \leq p, q \leq n$. Însumând aceste relații pentru q fixat și $1 \leq p \leq n$ avem

$$m(a_{1q} + \cdots + a_{pq}) = n(a_{1q} + \cdots + a_{pq}) + S \implies a_{1q} + \cdots + a_{pq} = \frac{S}{m - n},$$

deci fiecare coloană a tabelului are aceeași sumă a elementelor, și anume S/n . Analog, fiecare linie a tabelului are suma elementelor S/n . Din prima egalitate deducem că $a_{pq} = 2S/(mn)$ pentru orice $1 \leq p, q \leq n$ (în particular, cum $a_{pq} \neq 0$ avem $S \neq 0$). Dar atunci

$$n \cdot \frac{2S}{mn} = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = \frac{S}{m - n},$$

de unde $m = 2n$, adică $k = 2n - 2$. Demonstrația este finalizată.

Barem:

- Răspunsuri și modele corecte ... 2p
- Deducerea relației $a_{1q} + \dots + a_{pq} = S/(m-n)$... 2p
- Deducerea faptului că $a_{pq} = 2S/(mn)$... 1p
- Finalizare ... 2p

□

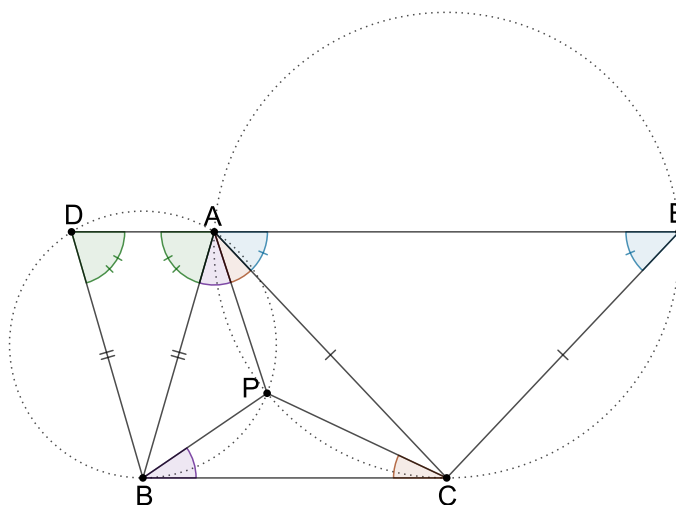
Problema 4

Fie $\triangle ABC$ un triunghi ascuțitunghic cu $AB \neq AC$ și P un punct în interiorul său cu proprietatea că $\angle PBC = \angle PAB$ și $\angle PCB = \angle PAC$. Paralela prin A la BC intersectează cercurile circumscrise triunghiurilor $\triangle APB$ și $\triangle APC$ în D , respectiv E .

- a) Demonstrați că $DE = 2BC$.
- b) Cercurile circumscrise triunghiurilor $\triangle DPE$ și $\triangle BPC$ se intersectează a doua oară în Q . Demonstrați că $QD = QE$.

Ana Boiangiu

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $AB < AC$.



a) Vom prezenta trei variante de abordare. Prima este cea mai directă și naturală.

Varianta 1. Observăm că

$$\begin{aligned}
 \angle AEC &= 180^\circ - \angle APC \\
 &= \angle PAC + \angle ACP \\
 &= \angle PCB + \angle ACP \\
 &= \angle ACB.
 \end{aligned}$$

Cum $AE \parallel BC$ avem $\angle CAE = \angle ACB$. Similar obținem $\angle ADB = \angle DAB = \angle ABC$. În particular, triunghiurile EAC și DAB sunt isoscele. Din teorema sinusurilor avem

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\sin(180^\circ - 2C)}{\sin C} = \frac{\sin 2C}{\sin C} = \frac{2 \sin C \cos C}{\sin C} = 2 \cos C \implies AE = 2b \cos C.$$

Similar

$$AD = 2c \cos B.$$

Din teorema cosinusului avem

$$DE = AE + AD = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 2c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2a,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru următoarele două variante, demonstrăm mai întâi o lemă importantă.

Lemă. Fie M intersecția dintre AP și BC . Atunci M este mijlocul laturii BC .

Demonstrație: Observăm că $\angle PCM = \angle CAM$ implică $\triangle PCM \sim \triangle CAM$ (în cazul **LUL**). De aici

$$\frac{PM}{CM} = \frac{CM}{AM} \implies MC^2 = MP \cdot MA.$$

Similar deducem că $MB^2 = MP \cdot MA$, deci, într-adevăr, $MB = MC$. ■

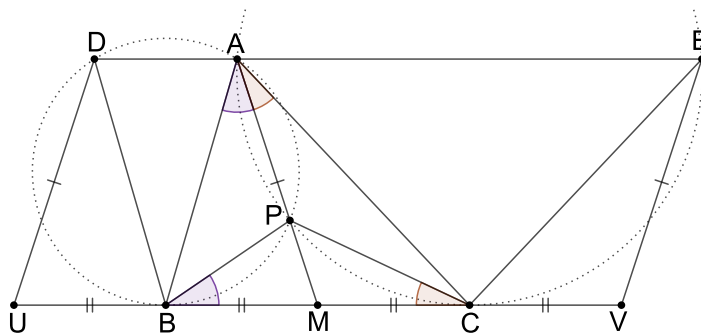
Varianta 2. Fie U simetricul lui M față de B și fie V simetricul lui M față de C . Reamintind că $\triangle EAC$ și $\triangle DAB$ sunt triunghiuri isoscele (fapt demonstrat în prima variantă de soluție), din simetrie deducem că $DAMU$ și $EAMV$ sunt trapeze isoscele, de unde $DU = AM = EV$. În plus

$$\angle DUM = \angle MAE = 180^\circ - \angle EVM,$$

deci $DU \parallel EV$ și $DEVU$ este paralelogram. În sfârșit

$$DE = UV = MU + MV = 2(MB + MC) = 2BC,$$

ceea ce trebuia demonstrat.



Varianta 3 (schiță). Din teorema lui Ptolemeu în formă trigonometrică avem

$$AC \cdot \sin \angle PAE = AE \cdot \sin \angle PAC + AP \cdot \sin \angle CAE,$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} AE &= b \cdot \frac{\sin \angle AMC}{\sin \angle MAC} - AP \cdot \frac{\sin C}{\sin \angle MAC} \\ &= b \cdot \frac{AC}{MC} - AP \cdot \frac{AM}{MC} \\ &= \frac{2(b^2 - AP \cdot AM)}{a}. \end{aligned}$$

În mod analog obținem

$$AD = \frac{2(c^2 - AP \cdot AM)}{a}.$$

Din demonstrația lemei și formula medianei avem

$$MP \cdot MA = MC^2 \implies AP \cdot AM = AM^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

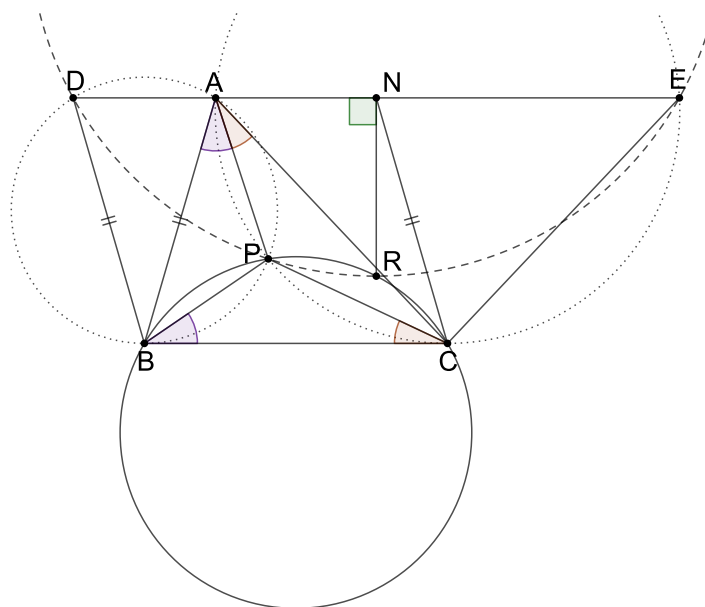
În sfârșit

$$DE = AE + AD = \frac{2(b^2 + c^2 - 2 \cdot AP \cdot AM)}{a} = 2a,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

b) Fie N mijlocul segmentului DE . Demonstrăm că $ANCB$ este trapez isoscel. În primul rând, din $DE = 2BC$ deducem $ND = BC$. Cum $ND \parallel BC$, avem că $BDNC$ este paralelogram, deci $CN = DB = AB$ (căci $\triangle DBA$ este isoscel). Cum $AN \parallel BC$ deducem că $ANCB$ este într-adevăr trapez isoscel.

Fie R intersecția dintre perpendiculara în N pe DE (adică mediatoarea segmentului DE) și cercul circumscris triunghiului BPC . Concluzia problemei se reduce la a demonstra că R se află pe cercul circumscris triunghiului DPE (de unde $Q \equiv R$).



Demonstrăm că R este ortocentrul triunghiului NBC . Folosind observațiile inițiale avem

$$\begin{aligned}\angle BPC &= 360^\circ - \angle APB - \angle APC \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ABC) - (180^\circ - \angle ACB) \\ &= \angle ABC + \angle ACB \\ &= 180^\circ - \angle BAC.\end{aligned}$$

De aici, cum $ABCN$ este trapez isoscel avem

$$\begin{aligned}\angle BRC &= \angle BPC \\ &= 180^\circ - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \angle BNC.\end{aligned}$$

Cum $RN \perp DE$ și $DE \parallel BC$, avem $NR \perp BC$, deci R este ortocentrul triunghiului BNC într-adevăr.

Vom demonstra acum că patrulateralele $NRCE$ și $NRBD$ sunt inscriptibile. Reamintind că $ANCB$ este trapez isoscel și că $\angle AEC = \angle ACB$, avem

$$\begin{aligned}\angle NRC &= 180^\circ - \angle NBC \\ &= 180^\circ - \angle ACB \\ &= 180^\circ - \angle AEC,\end{aligned}$$

deci $NRCE$ este inscriptibil. Analog, $NRBD$ este inscriptibil.

Finalizăm printr-un calcul de unghiuri. În primul rând

$$\begin{aligned}\angle DPE &= \angle DPA + \angle EPA \\ &= \angle DBA + \angle ECA \\ &= (180^\circ - 2\angle ABC) + (180^\circ - 2\angle ACB) \\ &= 2\angle BAC.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, reamintind că $DNCB$ și $ENBC$ sunt paralelograme avem

$$\begin{aligned}\angle DRE &= \angle DRN + \angle ERN \\ &= \angle DBN + \angle ECN \\ &= \angle BNC + \angle BNC \\ &= 2\angle BAC.\end{aligned}$$

Așadar $\angle DPE = \angle DRE$, deci R se află pe cercul circumscris triunghiului DPE . Demonstrația este finalizată.

Observație: Punctul P este *punctul A-Humpty* al triunghiului ABC și are multe proprietăți utile, în special în legătură cu ortocentrul lui $\triangle ABC$. Puteți citi mai multe despre el [aici](#). Totuși, problema poate fi rezolvată independent de aceste rezultate.

Barem:

- **a)** Rezolvare integrală 2p
- **b)** Construcția lui N și demonstrarea faptului că $ANCB$ este trapez isoscel 1p
- Construcția lui R și demonstrarea faptului că este ortocentrul lui $\triangle NBC$ 2p
- Demonstrarea faptului că $NRCE$ și $NRBD$ sunt inscriptibile 1p
- Finalizare 1p

□

Problemele 1-4: $4 \times 7p = 28p$

Puncte acordate din oficiu: 0p

Total: 28p

Timp de lucru: 4 ore