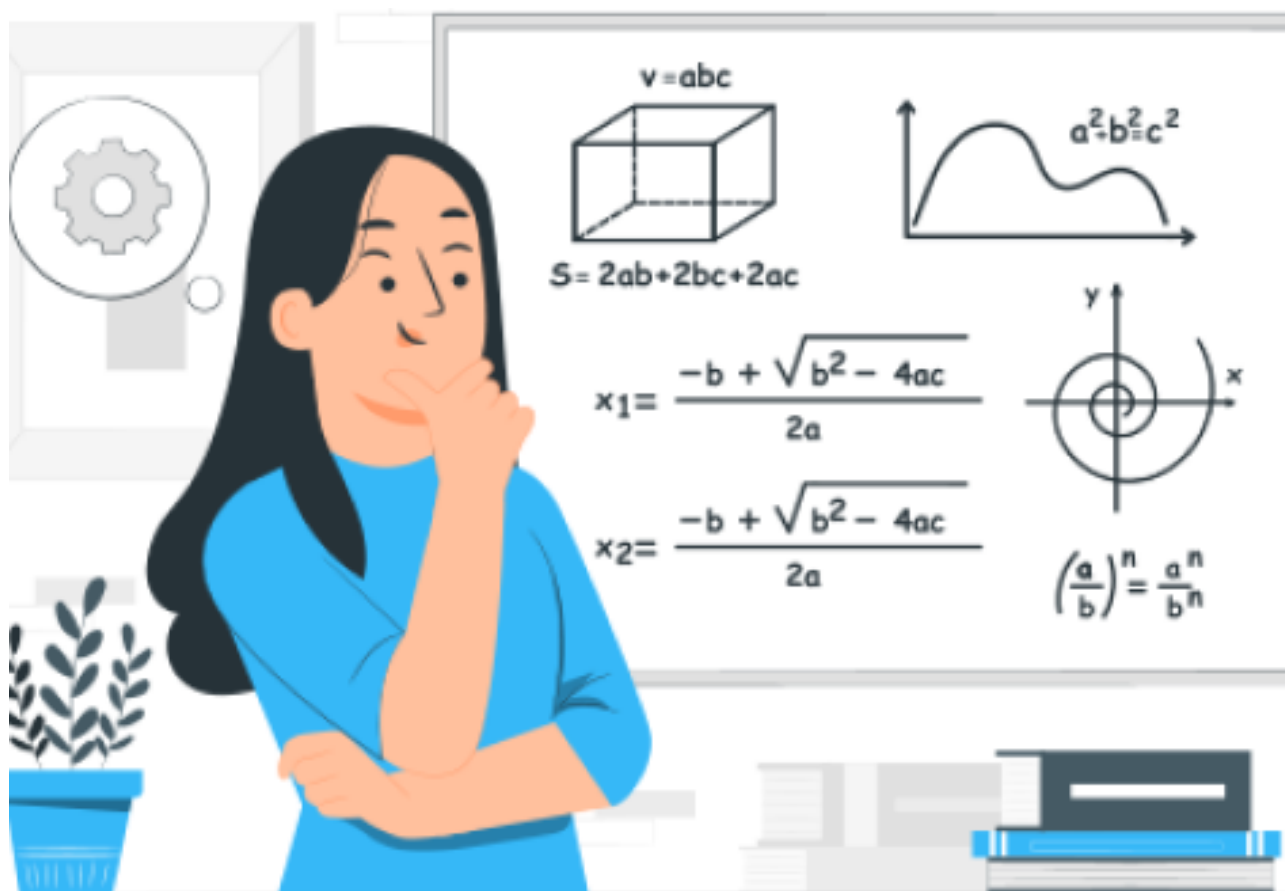




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Ana Boianiu

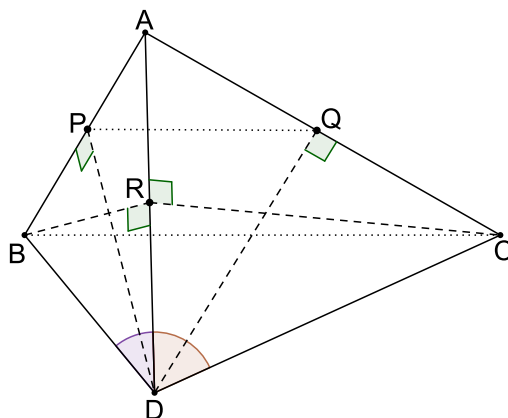
§1 Soluții

Problema 1

Fie $ABCD$ un tetraedru cu $\triangle ADB$ și $\triangle ADC$ ascuțitunghice și $AD \perp BC$. Fie P și Q proiecțiile vârfului D pe dreptele AB , respectiv AC . Demonstrați că $PQ \parallel BC$ dacă și numai dacă $\angle ADB = \angle ADC$.

Mălina Carla Pavel

Demonstrație. Fie R proiecția lui B pe AD . Deoarece $\triangle ADB$ și $\triangle ADC$ sunt ascuțitunghice, avem $R \neq D$. Atunci $AD \perp BR$ și $AD \perp BC$, deci $AD \perp (BRC)$. Prin urmare avem și $CR \perp AD$.



Patruleterele $BPRD$ și $CQRD$ sunt inscriptibile (fiind înscrise în cercurile de diametre BD , respectiv CD). Din puterea punctului avem

$$AP \cdot AB = AR \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

Din teorema lui Thales avem

$$PQ \parallel BC \iff \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}.$$

Prin urmare

$$PQ \parallel BC \iff AP = AQ.$$

În baza relației din puterea punctului, avem și că $AP = AQ \iff AB = AC$.

Demonstrăm mai întâi prima implicație. După cum am demonstrat anterior, avem $AB = AC$ și $AP = AQ$. Prin urmare $\triangle DPA \equiv \triangle DQA$ (în cazul **CI**), de unde $\angle DAB = \angle DAC$. Urmează că $\triangle DAB \equiv \triangle DAC$ (în cazul **LUL**), de unde că $\angle ADB = \angle ADC$, ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrăm acum a doua implicație. Cum $\angle ADB = \angle ADC$ avem $\angle BDR = \angle CDR$, deci $\triangle DRB \equiv \triangle DRC$ (în cazul **CU**), deci $BR = CR$. De aici $\triangle BRA \equiv \triangle CRA$ (în cazul **CC**), deci $AB = AC$. Din cele demonstrate mai sus, demonstrația este finalizată.

Barem:

- Construcția lui R și demonstrarea faptului că $BR \perp AD$ și $CR \perp AD$ simultan 1p
- Echivalența $PQ \parallel BC \iff AP = AQ \iff AB = AC$ 2p
- Implicația directă 2p

- Implicația reciprocă 2p

Observație barem: Din cauza unei erori a comisiei de subiecte, precizarea că $\triangle ADB$ și $\triangle ADC$ sunt ascuțitunghice a lipsit din enunțul dat în concurs. În aceste condiții, $PQ \parallel BC$ implică întotdeauna $\angle ADB = \angle ADC$, însă $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ implică $PQ \parallel BC$ doar dacă, în plus, $AB = AC$ (sau echivalent $AP = AQ$). **Nu se vor scădea puncte** pentru omiterea sau tratarea incompletă a acestei situații. $\square$

Problema 2

Pavel antrenează o echipă de fotbal formată din n jucători de înălțimi distincte două câte două, unde n este un număr natural nenul. Vrea să îi alinieze astfel încât pentru orice jucător J , numărul total al jucătorilor care fie se află la stânga lui J și sunt mai înalți decât J , fie se află la dreapta lui J și sunt mai scunzi decât J , este par. Aflați, în funcție de n , numărul total de aranjări posibile.

HMIC 2020

Demonstrație. Răspunsul este $\lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil!$, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x , iar $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că înălțimile jucătorilor sunt $1, 2, \dots, n$ (deoarece doar ordinea acestora este relevantă în problemă). Notăm pozițiile jucătorilor dintr-o ordonare corectă cu $1, 2, \dots, n$. În plus, notăm cu a_k înălțimea jucătorului k , așa încât $a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $a_j \neq a_k$ pentru $j \neq k$.

Observație: Paragraful de mai sus are doar rolul de a simplifica soluția din punct de vedere notațional. Poate fi reformulat ușor în limbaj de permutări astfel: vrem să aflăm numărul de permutări ale numerelor $1, 2, \dots, n$ cu proprietatea că fiecare element face parte dintr-un număr par de inversiuni. Aceste noțiuni depășesc nivelul clasei a 8-a, însă reprezintă doar un formalism și nu sunt necesare pentru rezolvarea problemei.

Dacă jucătorul de pe poziția k are x jucători mai scunzi în stânga, atunci are $(k-1) - x$ jucători mai înalți în stânga și $(a_k - 1) - x$ jucători mai scunzi în dreapta. Așadar, numărul jucătorilor care se află fie la stânga lui k și mai înalți decât k , fie se află la dreapta lui k și sunt mai scunzi decât k , este $a_k + k - 2(x+1)$. Acest număr este par dacă și numai dacă a_k și k au aceeași paritate.

Prin urmare, ordonarea jucătorilor sub condițiile problemei este echivalentă cu a distribui jucătorii de înălțimi pare pe pozițiile pare și respectiv jucătorii de înălțimi impare pe pozițiile impare.

Printre $1, 2, \dots, n$ sunt $\lfloor n/2 \rfloor$ numere pare și $\lceil n/2 \rceil$ numere impare. Deoarece există $s!$ moduri de a ordona o mulțime cu s elemente, sunt $\lfloor n/2 \rfloor!$ moduri de a aranja jucătorii de înălțimi pare și $\lceil n/2 \rceil!$ moduri de a aranja jucătorii de înălțimi impare. Concluzionăm că Pavel are $\lfloor n/2 \rfloor! \cdot \lceil n/2 \rceil!$ moduri de a își aranja echipa.

Barem:

- Exprimarea numărului cerut pentru jucătorul de pe poziția k sub forma $a_k + k - 2(x+1)$ și deducerea condiției de paritate $a_k \equiv k \pmod{2}$... 2p
- Echivalarea problemei cu plasarea înălțimilor pare pe poziții pare și a înălțimilor impare pe poziții impare ... 2p
- Numărarea aranjărilor: $\lfloor n/2 \rfloor!$ pentru pozițiile pare și $\lceil n/2 \rceil!$ pentru pozițiile impare ... 2p

- Finalizare 1p

□

Problema 3

Aflați toate tripletele de numere reale strict pozitive (a, b, c) astfel încât

$$a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

și

$$\frac{a}{b^3 + c^2 + a} + \frac{b}{c^3 + a^2 + b} + \frac{c}{a^3 + b^2 + c} = 1.$$

Tudor Chelaru

Demonstrație. Toate sumele din soluție vor fi ciclice. Vom demonstra că $a = b = c = 1$ este singurul triplet care verifică ipoteza. Este evident că acest triplet satisface ambele relații. Demonstrăm acum că este singurul.

În primul rând, din inegalitatea lui Titu avem

$$a + b + c = \sum \frac{a}{b} = \sum \frac{a^2}{ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca},$$

de unde

$$ab + bc + ca \geq a + b + c.$$

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$(b^3 + c^2 + a) \left(\frac{1}{b} + 1 + a \right) \geq (a + b + c)^2$$

și analoagele.

De aici avem

$$\sum \frac{a}{b^3 + c^2 + a} \leq \frac{1}{(a + b + c)^2} \sum a \left(\frac{1}{b} + 1 + a \right)$$

Folosind estimarea inițială obținem

$$\frac{2(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2)}{(a + b + c)^2} \leq \frac{2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = 1.$$

Așadar avem egalitate în toate inegalitățile aplicate, de unde, într-adevăr, $a = b = c = 1$.

Barem:

- Prima estimare 2p
- Aplicarea inegalității Cauchy-Schwarz 4p
- Finalizare 1p

Observație barem: Nu se acordă puncte pentru ghicirea soluției.

□

Problema 4

Fie n și k numere naturale nenule cu $10^{k-1} \leq n < 10^k$ și fie $N = 10^k \cdot (n+1) + n$.

- Dacă k este impar, demonstrați că N nu este pătrat perfect.
- Este oare posibil ca N să fie un pătrat perfect mai mare decât 10^{2026} (pentru o anumită valoare a lui k)?

MPFG 2024

Demonstrație. Va fi mai util să rescriem $N = (10^k + 1) \cdot (n+1) - 1$.

a) Ideea este să determinăm restul lui N la 11. Dacă k este impar, avem

$$N = \mathcal{M}_{11} \cdot (n+1) - 1 = \mathcal{M}_{11} - 1.$$

Dar se verifică ușor că nu există pătrate perfecte de forma $\mathcal{M}_{11} - 1$, ceea ce încheie demonstrația.

b) De fapt, putem alege n astfel încât N să fie pătrat perfect pentru orice k par (în particular avem $k \geq 2$). Alegem

$$n = (10^{k/2} - 1)^2 + 1 = 10^k - 2 \cdot 10^{k/2} + 2$$

Inegalitatea $10^{k-1} \leq n$ revine la

$$2 \cdot 10^{k/2} \leq 9 \cdot 10^{k-1} + 2.$$

Însă cum $k \geq 2$ avem $k-1 \geq k/2$, deci

$$9 \cdot 10^{k-1} + 2 > 9 \cdot 10^{k/2} > 2 \cdot 10^{k/2}.$$

Inegalitatea $n < 10^k$ revine la

$$2 \cdot 10^{k/2} > 2,$$

lucru evident cum $k \geq 2$. Acum, notăm $10^{k/2} = a$. Atunci

$$\begin{aligned} N &= (a^2 + 1)(a^2 - 2a + 1) + a^2 \\ &= (a^2 + 1)^2 - 2a(a^2 + 1) + a^2 \\ &= (a^2 - a + 1)^2, \end{aligned}$$

adică N este într-adevăr pătrat perfect. Concluzia rezultă alegând, de exemplu, $k = 2026$.

Observație (Asupra motivației, cu noțiuni teoretice mai avansate). La prima vedere, soluția pentru al doilea subpunct pare nenaturală. Poate însă fi motivată strict prin argumente de teoria numerelor. Scopul nostru este să rezolvăm ecuația

$$(n+1)(10^k + 1) - 1 = m^2.$$

Valoarea lui n este în esență irelevantă, și trebuie să rezolvăm

$$m^2 \equiv -1 \pmod{10^k + 1}.$$

Atunci când k este par, ecuația este în mod garantat rezolvabilă: putem în mod intuitiv alege $m = 10^{k/2}$. Problema cu această alegere este însă că dacă $n = 0$, lucru nepermis. Trebuie așadar să

alegem o altă rădăcină pătrată a lui -1 modulo $10^k + 1$. Varianta naturală este $m \equiv -10^{k/2} \pmod{10^k + 1}$, adică $m = 10^k + 1 - 10^{k/2}$, care conduce la valoarea lui n din soluția prezentată.

Bineînțeles, soluția poate fi motivată și alegând $n = f(10^{k/2})$ unde f este un *polinom* (o alegere optimistă ar fi chiar f de grad 2) care să forțeze formarea unui pătrat perfect.

Barem:

- **a)** Rezolvare integrală 2p
- **b)** Ideea de a alege $n = f(10^{k/2})$, unde f este o expresie convenabilă 1p
- Alegerea corectă pentru f și finalizare 4p

□

Problemele 1-4: $4 \times 7p = 28p$

Puncte acordate din oficiu: 0p

Total: 28p

Timp de lucru: 4 ore