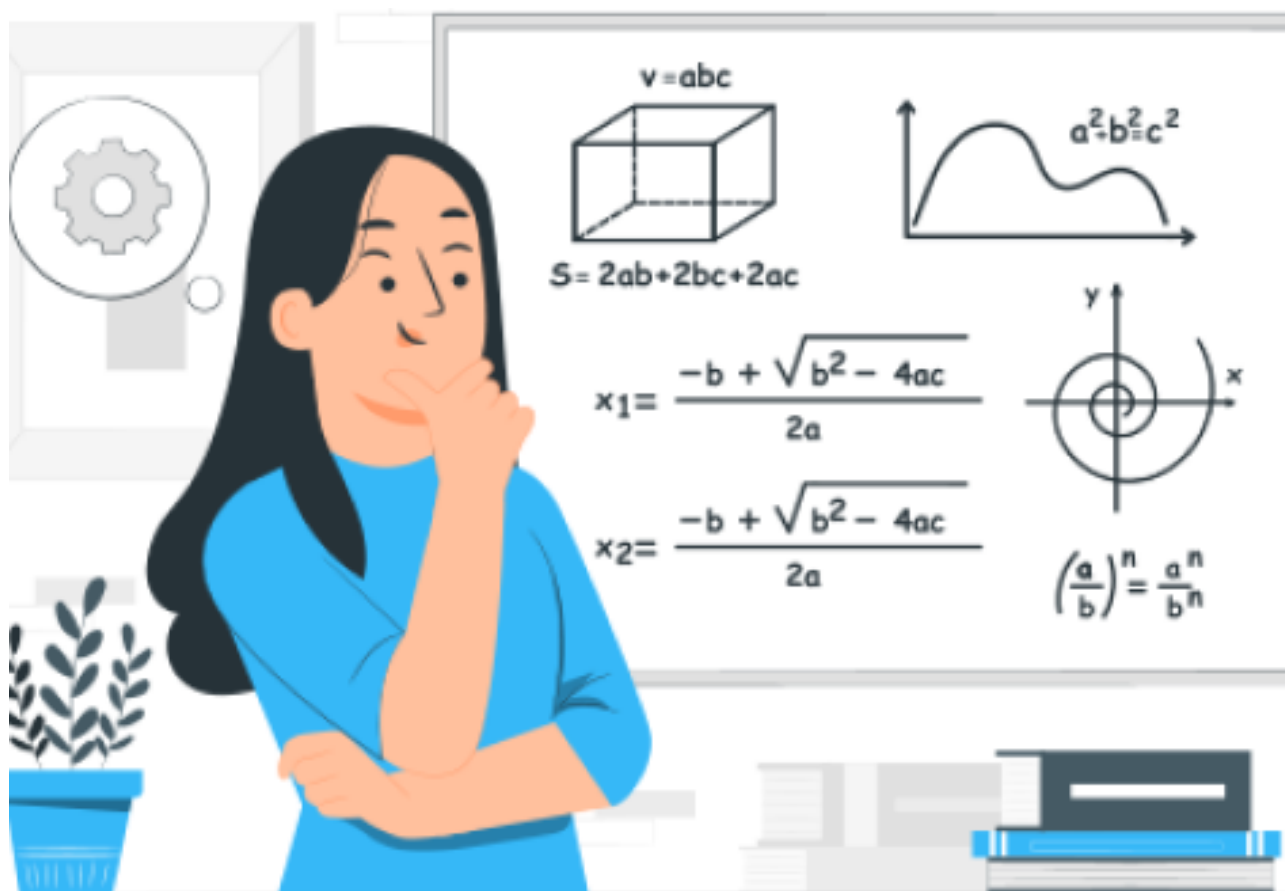




Concursul de matematică Upper.School Ediția 2025-2026

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Subiecte -
Ana Boianiu

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $ABCD$ un tetraedru cu $\triangle ADB$ și $\triangle ADC$ ascuțitunghice și $AD \perp BC$. Fie P și Q proiecțiile vârfului D pe dreptele AB , respectiv AC . Demonstrați că $PQ \parallel BC$ dacă și numai dacă $\angle ADB = \angle ADC$.

Problema 2

Pavel antrenează o echipă de fotbal formată din n jucători de înălțimi distincte două câte două, unde n este un număr natural nenul. Vrea să îi alinieze astfel încât pentru orice jucător J , numărul total al jucătorilor care fie se află la stânga lui J și sunt mai înalți decât J , fie se află la dreapta lui J și sunt mai scunzi decât J , este par. Aflați, în funcție de n , numărul total de aranjări posibile.

Problema 3

Aflați toate tripletele de numere reale strict pozitive (a, b, c) astfel încât

$$a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

și

$$\frac{a}{b^3 + c^2 + a} + \frac{b}{c^3 + a^2 + b} + \frac{c}{a^3 + b^2 + c} = 1.$$

Problema 4

Fie n și k numere naturale nenule cu $10^{k-1} \leq n < 10^k$ și fie $N = 10^k \cdot (n + 1) + n$.

- Dacă k este impar, demonstrați că N nu este pătrat perfect.
- Este oare posibil ca N să fie un pătrat perfect mai mare decât 10^{2026} (pentru o anumită valoare a lui k)?

Problemele 1-4: $4 \times 7p = 28p$

Puncte acordate din oficiu: $0p$

Total: $28p$

Timp de lucru: 4 ore