



Concursul de Matematică Upper.School Kids Ediția 2024-2025

Etapa II
Clasa a IV-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici, Cristina Frone

§1 Soluții

Problema 1

Bucuria a pus mâna pe 90 de amintiri triste și propune un joc pentru a le schimba în amintiri vesele. A hotărât următoarea regulă de schimb:

- o amintire tristă contra două amintiri dezgustătoare;
- 3 amintiri dezgustătoare contra două amintiri vesele.

Câte amintiri vesele va avea după ce schimbă cu ceilalți toate amintirile triste?

Demonstrație. Pentru cele 90 de amintiri triste Bucuria va primi $90 \times 2 = 180$ amintiri dezgustătoare. Pe acestea le schimbă în grupe de câte 3, adică în $180 : 3 = 60$ grupe de amintiri dezgustătoare și pentru fiecare grupă primește câte două amintiri vesele. Numărul total de amintiri vesele pe care le poate obține Bucuria este $60 \times 2 = \boxed{120}$.

Răspuns corect: $\boxed{120}$ 5p



Problema 2

Anxietatea verifică bateriile celor 10 telecomenzi ale panoului de comandă. Fiecare telecomandă folosește câte 3 baterii, fiecare rezistând 3 zile. Câte baterii sunt necesare pentru ca telecomenzile să funcționeze permanent în anul 2028?



Demonstrație. Anul 2028 este an bisect pentru că 2028 se împarte exact la 4, deci are 366 de zile. Pentru 3 zile sunt necesare $3 \times 10 = 30$ de baterii, iar $366 : 3 = 122$, adică numărul de baterii necesare este $122 \times 30 = \boxed{3660}$.

Soluție alternativă: Altfel, fiecare telecomandă consumă câte o baterie pe zi, deci fiecare telecomandă va consuma 366 de baterii în anul 2028, iar cele 10 telecomenzi au nevoie în total de $366 \times 10 = \boxed{3660}$ baterii.

Răspuns corect: $\boxed{3660}$ 5p



Problema 3

Bucuria vrea să o trimită pe Riley în vacanță, să stea cât mai mult la soare și a citit că în Caraibe vor fi 28 de zile cu soare în decembrie. Care este numărul minim de zile pe care ar trebui să le rezerve Bucuria pentru Riley, astfel încât să fie sigură că aceasta va prinde cel puțin două zile consecutive cu soare?

Demonstrație. În cea mai ghinionistă situație este posibil ca primele zile cu soare din vacanță să alterneze cu zile ploioase. Luna decembrie are 31 de zile, deci numărul zilelor cu ploaie este $31 - 28 = 3$, deci pot fi 3 secvențe alternante *Soare – Ploaie* sau *Ploaie – Soare*. Există două situații:

PSPSPSS

SPSPSPSS.

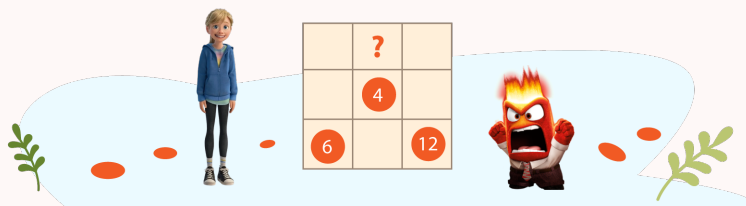
Dacă numărul de zile rezervate este 7, atunci ar putea să apară a doua situație în care prima zi este cu soare și în acest caz nu există două zile consecutive cu soare, deci numărul minim de zile pe care trebuie să le rezerve Bucuria pentru Riley este 8.

Răspuns corect: 8 5p



Problema 4

Riley a așezat în cele 9 căsuțe ale pătratului 3×3 de mai jos jetoane pe care sunt scrise numere naturale, astfel încât sumele numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie egale între ele. Cutremurul declanșat de nervii Furiei a deplasat jetoanele și Riley a observat că singurele care au rămas la locul lor sunt cele din figura următoare. Care este numărul care era scris pe jetonul din căsuța în care apare acum semnul întrebării?



Demonstrație. Ne uităm la ultima linie și la coloana a doua. Pătrățelul din centrul liniei este comun cu a doua coloană, deci va apărea și în suma numerelor de pe această linie și în suma numerelor de pe această coloană. Condiția de egalitate dintre cele două sume revine la $6 + 12 = 4 + ?$. Numărul care era scris pe jetonul din căsuța în care apare acum semnul întrebării este egal cu 14.

Răspuns corect: 14 5p



Problema 5

În cartierul lui Riley sunt 175 de case. Toate casele sunt numerotate cu numere naturale consecutive începând de la 1. Proprietarii doresc să pună numere noi caselor înlocuindu-le cu cifre din bronz. Dacă prețul unei cifre este de 10 dolari, cât va încasa firma care face lucrarea?



Demonstrație. Vom număra câte cifre sunt necesare pentru a scrie toate numerele naturale de la 1 la 175.

- Primele 9 case au nevoie de $9 \times 1 = 9$ cifre;
- Casele numerotate de la 10 la 99 au nevoie de $(99 - 10 + 1) \times 2 = 90 \times 2 = 180$ cifre.
- Casele numerotate de la 100 la 175 au nevoie de $(175 - 100 + 1) \times 3 = 76 \times 3 = 228$ cifre.

Necesarul de cifre de bronz este $9 + 180 + 228 = 417$. Firma care va executa lucrarea va încasa $417 \times 10 = \boxed{4170}$ dolari.

Răspuns corect: 5p



Problema 6

Furia se înfurie că poate fi întrecută de către Invidie. În timp ce Furia convinge 3 colegi ai lui Riley să se certe cu 3 copii din anul mai mare, Invidia convinge 5 colegi ai lui Riley să se certe cu 5 copii din anul mai mic. Într-o săptămână au avut loc 264 de conflicte. Câți copii din școala lui Riley au fost implicați în conflictele provocate de Invidie?

Observație: La un conflict participă exact 2 copii, iar fiecare copil a fost implicat doar într-un singur conflict.

a) 99

b) 264

c) 33

d) 330

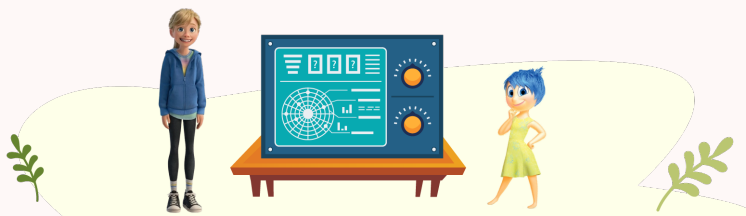
Demonstrație. Furia și Invidia conving în același timp $3 + 5 = 8$ colegi să provoace conflicte cu alți 8 copii. Cum $264 : 8 = 33$, înseamnă că cele două emoții negative au convins 33 grupuri a câte 8 colegi de ai lui Riley să se certe. Din fiecare grup de 8 colegi, 5 sunt provocați de Invidie, deci numărul total al acestora este $33 \times 5 = 165$. Cum la fiecare conflict participă și un copil din anul mai mic, obținem că numărul victimelor făcute de Invidia este $165 \times 2 = \boxed{330}$.

Răspuns corect: 5p



Problema 7

Codul de pornire al panoului de control al emoțiilor este un număr natural de 3 cifre, dintre care două sunt identice, iar a treia este diferită de acestea. Câte astfel de coduri există dacă prima cifră a codului nu poate fi 0?



a) 270

b) 261

c) 252

d) 243

Demonstrație. Codurile sunt numere naturale de 3 cifre de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, respectiv $\overline{baa}$, unde $a \neq b$.

- A afla câte numere de 3 cifre sunt de forma $\overline{aab}$ revine la a determina numărul numerelor de două cifre $\overline{ab}$ cu $a \neq b$. Din cele 90 de numere de două cifre le scădem pe cele care au cifrele egale, adică 11, 22, 33, ..., 99 și obținem $90 - 9 = 81$.

- Repetăm raționamentul pentru numerele de forma $\overline{aba}$ și pentru cele de forma $\overline{baa}$ și obținem că există câte 81 din fiecare tip.

Numărul total de coduri cu care poate fi deschis panoul de control al emoțiilor este $81 \times 3 = 243$.

Răspuns corect: 5p

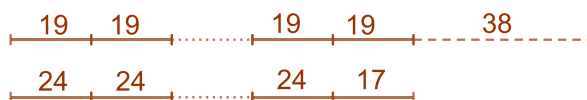


Problema 8

Tristețea își grupează jurnalele într-un dulap cu sertare. Dacă pune câte 19 jurnale într-un sertar, îi rămân 38 în afară. Dacă pune câte 24, ultimul sertar are doar 17 jurnale. Câte sertare are dulapul?



Demonstrație. Când pune câte 24 de jurnale în fiecare sertar, Bucuria pune câte 5 jurnale în plus în fiecare sertar față de prima distribuție, mai puțin în ultimul. Cele 5 jurnale din fiecare sertar plus cele 17 care rămân pentru ultimul înseamnă tot atât de multe cât cele 19 din ultimul sertar completat în primul caz plus cele 38 care au rămas. Am reprezentat grafic în desenul de mai jos acest lucru.



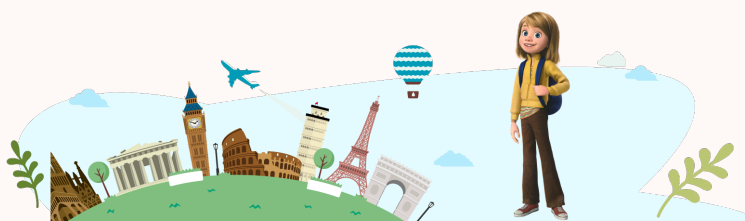
Așadar, $(19 + 38 - 17) : 5 = 40 : 5 = 8$ reprezintă numărul de sertare minus 1. Numărul de sertare pe care le are dulapul este egal cu .

Răspuns corect: 5p



Problema 9

Riley pleacă într-o călătorie de 3 zile. În prima zi parcurge o pătrime din drum și încă 6 km. În a doua zi parcurge trei șesimi din rest și încă 12 km. În a treia zi parcurge ultimii 120 km. Care este distanța totală parcursă de Riley?



a) 360 km

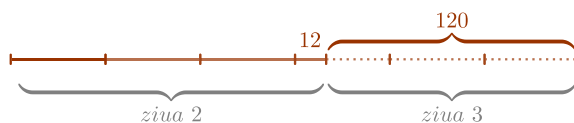
b) 270 km

c) 324 km

d) 297 km

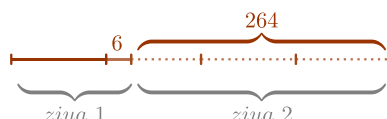
Demonstrație. Vom aplica metoda mersului invers.

- Un întreg este format din 6 șesimi.



În a doua zi a parcurs 3 șesimi și încă 12 km, deci în ultima zi a parcurs 3 șesimi fără 12 km. Obținem astfel că 3 șesimi înseamnă $120 + 12 = 132$ km, deci 6 șesimi înseamnă $132 + 132 = 264$ km.

- La sfârșitul primei zile avea de parcurs 264 km și asta reprezintă 3 pătrimi din drumul total fără 6 km.



Deci 3 pătrimi înseamnă $264 + 6 = 270$ km, o pătrime este egală cu $270 : 3 = 90$ km și 4 pătrimi sunt egale cu $90 \times 4 = 360$ km.

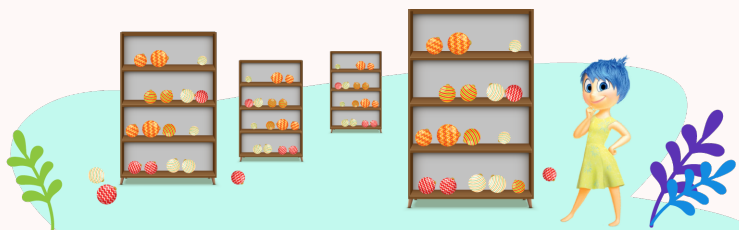
Distanța totală parcursă de Riley a fost de 360 km.

Răspuns corect: a) 5p



Problema 10

Bucuria așează 101 globuri pe 13 rafturi, astfel încât, oricum ar alege 3 rafturi consecutive, sunt întotdeauna 24 de globuri pe acestea în total. Câte globuri sunt la un loc pe rafturile 2 și 12?



Demonstrație. Să observăm mai întâi că pe primele 3 rafturi sunt tot atâtea globuri câte sunt pe rafturile 2, 3 și 4 la un loc, deci pe rafturile 1 și 4 există același număr de globuri. Repetăm raționamentul și observăm că pe rafturile 2 și 5, respectiv 3 și 6 există același număr de globuri. Vom nota cu a numărul de globuri de pe primul raft, cu b numărul de globuri de pe al II-lea raft și cu c numărul de globuri de pe al III-lea raft. Distribuția numărului de globuri pe rafturi este

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a$$

Pe primele 6 rafturi sunt $24 \times 2 = 48$ globuri, iar pe ultimele 6 sunt tot atâtea. Pe raftul din mijloc, care este al 7-lea, sunt $101 - 48 - 48 = 5$ globuri, deci $a = 5$, iar $b + c = 24 - 5 = 19$. Pe rafturile 2 și 12 sunt în total 19 globuri.

Răspuns corect: 19 5p

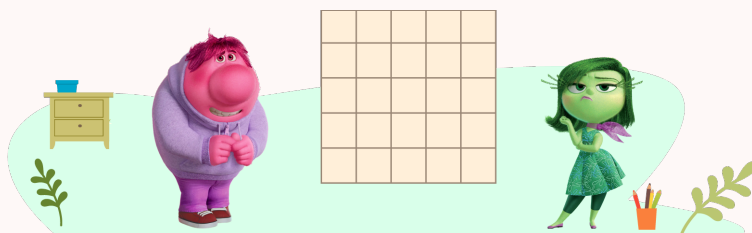


Problema 11

Dezgustul își hrănește superioritatea propunându-i un joc Rușinii. Aceasta trebuie să completeze toate pătrățelele tabelului 5×5 de mai jos, astfel încât să respecte simultan regulile:

- fiecare pătrățel trebuie colorat fie în verde, fie în roșu;
- fiecare pătrat 2×2 extras din tabel trebuie să conțină trei pătrățele de o culoare și una de cealaltă.
- numărul de pătrățele colorate în roșu să fie cel mai mic cu putință.

Care este cel mai mic număr de pătrățele roșii pe care ar putea Rușinea să le coloreze, astfel încât să răspundă provocării Dezgustului?



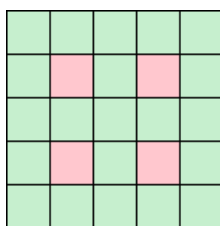
a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

Demonstrație. Din tabelul 5×5 se pot extrage 16 pătrate 2×2 . Pentru a colora cât mai puține pătrățele roșii este necesar să colorăm pătrățelele care sunt comune la cât mai multe pătrate 2×2 . Acestea sunt cele centrale, adică cele care nu sunt pe liniile sau pe coloanele din margine. Colțurile fac parte dintr-un singur pătrat 2×2 , cele de pe margini care nu sunt colțuri fac parte din două pătrățele 2×2 , iar cele din interior sunt comune la 4 pătrate 2×2 . Fiecare pătrat 2×2 din colț trebuie să aibă câte un pătrățel roșu, iar aceste pătrate nu se suprapun, adică nu au pătrățele comune, deci numărul minim de pătrățele care trebuie colorate în roșu este 4. Un exemplu de colorare este oferit mai jos.



Răspuns corect: b) 5p



Problema 12

Riley a acumulat 60 de globuri cu emoții pozitive și 60 de globuri cu emoții negative. Ea vrea să le organizeze în cutii astfel:

- a) în fiecare cutie există același număr de globuri cu emoții pozitive;
- b) nu există două cutii care să aibă același număr de globuri cu emoții negative;
- c) în fiecare cutie există atât globuri cu emoții pozitive, cât și globuri cu emoții negative.

Care este cel mai mare număr de cutii pe care le poate folosi Riley?

- a) 20 b) 12 c) 10 d) 6

Demonstrație. Cele 60 de globuri cu emoții pozitive trebuie împărțite în cutii în număr egal în fiecare cutie, deci numărul de cutii este un număr natural la care 60 se împarte exact. Acestea sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 și 60. Pentru ca numărul de cutii să fie cât mai mare e necesar ca în fiecare cutie să pună un număr cât mai mic de globuri cu emoții negative. Suma numerelor naturale de la 1 la 11 este $(1 + 11) + (2 + 10) + (3 + 9) + (4 + 8) + (5 + 7) + 6 = 5 \times 12 + 6 = 66$, care este prea mare, deci numărul de cutii este mai mic decât 11. Primul număr mai mic decât 11 din lista umerelor la care 60 se împarte exact este 10. Un exemplu de împărțire a globurilor cu emoții negative este 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 și 13, iar globurile cu emoții pozitive vor fi $60 : 10 = 6$ în fiecare cutie. Cel mai mare număr de cutii pe care le poate folosi Riley este 10.

Răspuns corect: c) 5p

**Problema 13**

Bucuria organizează un campionat de fotbal la care participă patru echipe din școala la care învață Riley. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte câte un singur meci. Pentru un scor egal fiecare echipă primește un punct, iar în celălalt caz echipa câștigătoare primește 3 puncte și cea care a pierdut nu primește nimic. Știind că la sfârșitul campionatului 3 echipe au punctajele 2, 5 și 6, care este punctajul celei de-a patra echipe?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

Demonstrație. În campionat fiecare echipă dintre cele 4 joacă câte 3 meciuri, deci numărul de meciuri jucate este $3 \times 4 : 2 = 6$. Vom afla cum s-a încheiat fiecare meci. Să notăm cu A echipa care a obținut 2 puncte, cu B cea care a obținut 5 puncte, cu C echipa cu 6 puncte și cu D ultima echipa pentru care trebuie să aflăm punctajul.

- A are două puncte pe care le poate obține într-un singur mod, $2 = 1 + 1 + 0$, adică are două meciuri egale și o înfrângere;
- B are 5 puncte pe care le poate obține într-un singur mod, $5 = 3 + 1 + 1$, adică are două meciuri egale și o victorie;
- C are 6 puncte pe care le poate obține într-un singur mod, $6 = 3 + 3 + 0$, adică are două victorii și o înfrângere. Cele două victorii le obține în meciurile cu A și D pentru că echipa B nu are nicio înfrângere, deci echipa C a pierdut meciul cu echipa B .

- Echipa B a făcut egal în meciurile cu A și D ;
- Echipa A mai face un egal în meciul cu echipa D .

	A	B	C	D
A-B	1	1		
A-C	0		3	
A-D	1			1
B-C		3	0	
B-D		1		1
C-D			3	0
	2	5	6	2

Scorul pe care l-a obținut a patra echipă este egal cu 2.

Răspuns corect: c) 5p



Problema 14

În jurul unei mese rotunde sunt 30 de emoții. Unele poartă pălării, iar altele nu. Cele care poartă pălării spun întotdeauna adevărul. Cele care nu poartă pălării mint mereu. Fiecare emoție spune:

„-Cel puțin una dintre cele două emoții de lângă mine nu poartă pălărie.”

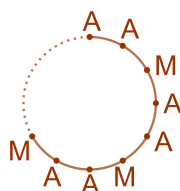
Care este numărul maxim de emoții care pot purta pălărie?

Demonstrație.

- O emoție care minte este înconjurată de două emoții care spun adevărul pentru că ea afirmă „Cel puțin una dintre cele două emoții de lângă mine nu poartă pălărie,” afirmație falsă și asta înseamnă că emoțiile care îi sunt vecine poartă pălărie, deci spun adevărul.
- O emoție care spune adevărul are printre cele două emoții vecine cel puțin una care minte.
- Nu pot fi 3 emoții vecine care spun toate adevărul pentru că, în acest caz, afirmația celei din mijloc nu mai este adevărată, ambele emoții care îi sunt vecine ar spune adevărul. Așadar, în fiecare grup de 3 emoții așezate consecutiv la masă trebuie să avem una care minte.

Pentru ca numărul de emoții care poartă pălărie, adică spun adevărul, să fie maxim e necesar ca în fiecare grup de 3 să fie o emoție care minte și două care spun adevărul.

Un exemplu de distribuție a acestora este



Cel mai mare număr de emoții care pot purta pălărie este $30 : 3 \times 2 = \boxed{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{20}$ 5p



Problema 15

Bucuria, Tristețea, Furia, Frica și Dezgustul se pregătesc să meargă la cinema pentru a viziona un film nou. Fiecare emoție are un alt nivel de experiență, determinat de numărul de amintiri adunate, exprimat prin numerele 1, 2, 3, 4 și 5 (5 – cea mai experimentată, 1 – cea mai puțin experimentată). Ele se așază pe un rând de cinci scaune, marcate de la stânga la dreapta cu literele A, B, C, D și E . În câte moduri se pot aranja cele cinci emoții dacă, atât cea de pe scaunul B , cât și cea de pe scaunul D trebuie să aibă, pe ambele părți, emoții mai experimentate?



a) 14

b) 16

c) 24

d) 18

Demonstrație. Problema revine la afla în câte moduri putem așeza cifrele 1, 2, 3, 4 și 5 pe cele cinci poziții, astfel încât cifrele de pe pozițiile B și D să fie încadrate de cifre mai mari. Să observăm:

- Cifrele 4 și 5 nu vor ocupa niciodată pozițiile B și D pentru că acestea sunt cele mai mari, deci nu ar avea cum să aibă în ambele părți cifre mai mici.
- Dacă pe pozițiile B și D se găsesc cifrele 1 și 2, atunci celelalte cifre pot fi așezate oricum, în toate cele 6 moduri: (3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4), (5, 4, 3). În același timp, cifrele 1 și 2 pot ocupa pozițiile B și D în două moduri: 1, 2 sau 2, 1. Găsim, astfel, $2 \times 6 = 12$ moduri în care se pot așeza emoțiile pe scaune.
- Dacă pe locul B se poziționează cifra 3, atunci pe D nu se poate afla decât cifra 1 pentru că aceasta este cea mai mică dintre toate și, oriunde am așeza-o, ea va fi vecină fie cu 2, fie cu 3, situație care nu convine. În acest caz, cifra 2 poate ocupa doar ultima poziție, adică E , iar 4 și 5 se pot afla pe oricare dintre pozițiile A și C , adică se obțin alte 2 variante.
- Mai există încă două variante față de cele descrise până acum, anume când 1 este pe B și 3 pe D .

Numărul total de moduri în care se pot așeza emoțiile pe cele 5 scaune, respectând condițiile impuse este $12 + 2 + 2 = \boxed{16}$.

A	B	C	D	E
3	1	4	2	5
3	1	5	2	4
4	1	3	2	5
4	1	5	2	3
5	1	4	2	3
5	1	3	2	4

A	B	C	D	E
3	2	4	1	5
3	2	5	1	4
4	2	3	1	5
4	2	5	1	3
5	2	4	1	3
5	2	3	1	4

A	B	C	D	E
4	3	5	1	2
5	3	4	1	2

A	B	C	D	E
2	1	4	3	5
2	1	5	3	4

Răspuns corect: 5p



Problema 16

Pentru a scăpa de stresul său, Plictiseala scrie pe o foaie de hârtie, în ordine crescătoare, toate numerele de cinci cifre care încep sau se termină cu grupul de cifre 33. Pe ce loc este numărul 65433?



a) 1263

b) 1545

c) 1572

d) 1523

Demonstrație.

- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 1 sunt de la 10033 până la 19933, adică $199 - 99 = 100$ numere.
- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 2 sunt de la 20033 până la 29933, adică $299 - 199 = 100$ numere.
- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 3 sunt de două tipuri: cele care încep cu 33 și cele care se termină în 33. Cele care încep cu 33 sunt de la 33000 până la 33999 și numărul lor este 1000, iar cele care se termină în 33 sunt de la 30033 până la 39933, iar numărul lor este $399 - 299 = 100$. Am numărat, însă, de două ori pe cele care și încep cu 33, se și termină cu 33. Acestea sunt 33033, 33133, 33233, ..., 33933, în total 10, pe care trebuie să le scădem.
- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 4 sunt de la 40033 până la 49933, adică $499 - 399 = 100$ numere.
- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 5 sunt de la 50033 până la 59933, adică $599 - 499 = 100$ numere.

- Numerele cu cifra zecilor de mii egală cu 6 sunt de la 60033 până la 65433, adică $654 - 599 = 55$ numere.

În această înșiruire numărul 65433 este pe poziția $100 + 100 + 100 + 1000 - 10 + 100 + 100 + 55 = 1545$.

Răspuns corect: b) 5p
□

Problemele 1-16: $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: 20p

Total: 100p

Timp de lucru: 2 ore