



Olimpiada Națională Gazeta Matematică  
(ONGM) 2020-2021  
Organizator local Upper.School

Etapa I  
Clasa a-X-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

## §1 Soluții

### Problema 1

Soluțiile ecuației  $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$  sunt:

- a)  $\{\pm 1\}$       b)  $\{\pm 2\}$       c)  $\{\pm\sqrt{2}\}$       d)  $\{\pm\frac{1}{2}\}$       e)  $\{\pm 4\}$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

### Problema 2

Să se rezolve ecuația:  $3 \lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$

- a)  $x_{1,2} = \pm\sqrt[3]{10}$       b)  $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{10}$       c)  $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[3]{10^{-1}}$   
 d)  $x_1 = \sqrt[3]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10^{-1}}$       e) nu admite soluții

Răspuns corect:  d) ..... 1p

### Problema 3

Să se rezolve inecuația:  $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$

- a)  $x \in (2, 3)$       b)  $x \in (0, 3) \cup (3, \infty)$       c)  $x \in (1, \infty)$   
 d)  $x \in \left(\frac{\ln 2}{\ln 3}, 1\right)$       e)  $x = 3$

Răspuns corect:  d) ..... 1p

### Problema 4

Cea mai mare valoare pe care o poate lua funcția:  $f : (0, \infty) \rightarrow R$ ,

$$f(x) = (\log_3 x)^2 + 2(\log_3 x) \cdot \left(\log_3 \frac{9}{x}\right)$$

este:

- a) 100      b) 10      c) 1      d) 4      e) 64

Răspuns corect:  d) ..... 1p

### Problema 5

Fie  $a \in (0, 1)$  și numerele  $m = a^{1+\sqrt{6}}$  și  $n = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ . Atunci:

- a)  $m > n$       b)  $m + n = 2$       c)  $m + n > 2$   
 d)  $m < n$       e)  $m^{1+\sqrt{6}} = n^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

**Răspuns corect:**  d) ..... 1p

**Problema 6**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4^x - 6^x + 9^x}{4^x + 6^x + 9^x}$ . Notăm  $I = f(\mathbb{R})$ . Atunci:

- a)  $I = [0, 1]$       b)  $I = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$       c)  $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right)$       d)  $I = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$       e)  $I = (0, 1)$

**Răspuns corect:**  c) ..... 1p

**Problema 7**

Să se rezolve inecuația  $\log_x(3x) \leq 2$

- a)  $x \in (0, 1) \cup [3, \infty)$       b)  $x \in (3, \infty)$       c)  $x = 3$   
d)  $x \in (0, 3)$       e)  $x = 1$

**Răspuns corect:**  a) ..... 1p

**Problema 8**

Fie  $A \subset \mathbb{R}$  mulțimea soluțiilor inecuației  $2^{\sqrt{4-x}} < 4^{\frac{x}{2}}$ . Atunci:

- a)  $A = \left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$       b)  $A = (0, \infty)$       c)  $A = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, 4\right]$   
d)  $A = (0, 4)$       e)  $A = (-\infty, 4)$

**Răspuns corect:**  c) ..... 1p

**Problema 9**

Determinați mulțimea:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right\}$$

- a)  $A = \left(0, \frac{4}{5}\right)$       b)  $A = (0, 4)$       c)  $A = (0, 2)$   
d)  $A = \emptyset$       e)  $A = \left(0, \frac{4}{5}\right] \cup \{2\}$

**Răspuns corect:**  e) ..... 1p

**Problema 10**

Suma soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{8-x} = 2$  este:

- a) 0      b) 10      c) 25      d) -25      e) 27

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 11**

Produsul soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt[3]{x^3 + 7} + \sqrt[3]{x + 7} = 4$  este:

- a)  $\frac{1}{2}$                       b) 0                      c) 1                      d) -1                      e) 4

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 12**

Fie  $S$  mulțimea soluțiilor reale ale ecuației:  $\frac{2^x}{x} + x \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 4$  atunci:

- a)  $S \subset [1, 3)$               b)  $S \subset (0, 1)$               c)  $S = \{2, 7\}$               d)  $S = \emptyset$               e)  $S = \mathbb{R}$

Răspuns corect:  a) ..... 1p

**Problema 13**

Pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ , fie funcția  $f = \begin{cases} ax + 2, & x \leq 1 \\ x + 2a, & x > 1 \end{cases}$  și fie  $A = \{a \in \mathbb{R} / f \text{ este injectivă}\}$  și  $B = \{a \in \mathbb{R} / f \text{ este surjectivă}\}$ . Atunci:

- a)  $A = [2, \infty), B = (0, 1]$               b)  $A = [-1, 1), B = (0, 1]$               c)  $A = [1, \infty), B = (0, 1]$   
d)  $A = [1, \infty), B = (-1, 1]$               e)  $A = [1, \infty), B = (0, 2]$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 14**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4$ . Să se determine funcția  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă

$$(f \circ g \circ f^{-1})(x) = \frac{3}{2}x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

- a)  $g(x) = -\frac{3}{2}x + 1$               b)  $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$               c)  $g(x) = \frac{5}{2}x - 1$   
d)  $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$               e) nu există  $g$  cu proprietatea din enunț.

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 15**

Fie  $a \in (1, \infty)$  și numerele  $x = \sqrt[4^n - 1]{(\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{a})^{2^n}}$  și  $y = \sqrt[n]{(\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n(n+1)]{a})^{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Precizați dacă:

- a)  $x > y$               b)  $x^{2^n + 1} = y$               c)  $xy < 1$               d)  $xy > 1$               e)  $x = y$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problema 16**

Să se calculeze  $E = \left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c}$  pe domeniul de existență:

- a)  $E = 0$       b)  $E = 2$       c)  $E = 10$       d)  $E = 1$       e)  $E = \frac{1}{10}$

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 17**

Fie  $a = \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{9}$  și  $b = 4\sqrt[4]{\frac{1}{162}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{32}} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{4}}$ . Atunci:

- a)  $a < b$       b)  $a = b$       c)  $a > b$       d)  $a + b = 2$       e)  $a + b = 0$

Răspuns corect:  a) ..... 1p

**Problema 18**

Mulțimea valorilor lui  $x$  pentru care există simultan expresiile:  $\sqrt[3]{\frac{1}{4-x^2}}$  și  $\log_2 \sqrt{-x^2 - x + 6}$

- a)  $\emptyset$       b)  $(-3, 2) \setminus \{-2\}$       c)  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$       d)  $(-3, 2)$       e)  $\mathbb{R}^*$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problema 19**

Fie  $S$  mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $\log_x(x^2 + 2x) + \log_{x^2}(x + 2) = 4$  atunci

- a)  $S \subset (0, 2)$       b)  $S \subset [2, \infty)$       c)  $S = \{4, 5\}$   
d)  $S = \emptyset$       e)  $S = (0, \infty) - \{1\}$

Răspuns corect:  b) ..... 1p

**Problema 20**

Mulțimea soluțiilor inecuației  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$  este:

- a)  $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$       b)  $(3, \infty)$       c)  $\emptyset$       d)  $[6, 8]$       e)  $\left[\frac{5}{2}, 3\right)$

Răspuns corect:  e) ..... 1p