



Olimpiada Națională Gazeta Matematică  
(ONGM) 2020-2021  
Organizator local Upper.School

Etapa I  
Clasa a-XI-a

- Soluții -

Subiecte elaborate de SSMR - Filiala Gorj

**§1 Soluții****Problema 1**

Se consideră matricile:  $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = (3 \ -1 \ -2)$  și  $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $A \cdot B - C$ .

a)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 2**

Se consideră matricile:

$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix}$  și  $C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}$ . Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $xA + yB = C$

a)  $x = 1, y = 2$

b)  $x = 2, y = 1$

c)  $x = -2, y = -2$

d)  $x = 2, y = -1$

e)  $x = 2, y = 2$

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 3**

Fie matricea  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Să se calculeze  $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$  impar

a)  $X$

b)  $I_2$

c)  $0_2$

d)  $-X$

e)  $-I_2$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 4**

Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ ,  $m, x \in \mathbb{R}$ . Aflați mulțimea  $M$  a tuturor valorilor lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $A$  este inversabilă oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

a)  $M = \emptyset$

b)  $M = (0, \infty)$

c)  $M = (2, \infty)$

d)  $M = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

e)  $M = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 5**

Fie  $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculați  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$

- a)  $2^n A$                       b)  $(2^n - 1) A$                       c)  $(n - 1) A$                       d)  $(2^{n-1} - 1) A$                       e)  $n^2 A$

**Răspuns corect:**  d) ..... 1p

**Problema 6**

Să se calculeze valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- a)  $a + b + c$                       b)  $a^2 + b^2 + c^2$                       c)  $ab + bc + ac$   
 d)  $(a + b)(b + c)(a + c)$                       e)  $-4(b - a)(c - a)(c - b)$

**Răspuns corect:**  e) ..... 1p

**Problema 7**

Să se calculeze valoarea determinantului  $\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$ .

- a) 0                      b) b                      c) c                      d) a                      e)  $(a + b + c)^3$

**Răspuns corect:**  e) ..... 1p

**Problema 8**

Să se rezolve ecuația:  $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ m^2 & -m & x \end{vmatrix} = 0$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ .

- a)  $x \in \{1\}$                       b)  $x \in \{1, 2, 3\}$                       c)  $x \in \{1, -m, m - 1\}$   
 d)  $x \in \{2, -m, m - 1\}$                       e)  $x \in \{1, 2, 4\}$

**Răspuns corect:**  c) ..... 1p

**Problema 9**

Matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  verifică relația  $A^3 = pA^2 + qA$  pentru

- a)  $p = -2, q = 3$                       b)  $p = -2, q = 2$                       c)  $p = 3, q = -2$   
 d)  $p = -3, q = 2$                       e)  $p = 1, q = 1$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 10**

Inversa matricei  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  este:

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$       e)  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 11**

Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2})$

- a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $\infty$       c) 1      d)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       e)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 12**

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$

- a) 1      b) 2      c)  $\infty$       d)  $-\frac{5}{12}$       e) 9

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 13**

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^3}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

- a)  $\infty$       b)  $-\infty$       c) -1      d)  $-\frac{1}{4}$       e) 1

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 14**

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sin^3 x + 1}{x^2 \cos^2 x + 1}$

- a) 0      b)  $\infty$       c) 1      d) 2      e) nu există

Răspuns corect:  e) ..... 1p

**Problema 15**

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2) \arcsin \frac{1}{2x^2 + 1}$

- a) 0                      b) 1                      c)  $\infty$                       d)  $\frac{1}{2}$                       e) 2

Răspuns corect:  d) ..... 1p

**Problema 16**

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x + \cos x)e^{-x^2}$ .

- a)  $\infty$                       b)  $-\infty$                       c) 0                      d)  $e$                       e) 1

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 17**

Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n$

- a)  $\frac{1}{2}$                       b) 0                      c) 1                      d) 2                      e)  $\infty$

Răspuns corect:  a) ..... 1p

**Problema 18**

Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2}$                       c)  $\frac{2}{3}$                       d) 1                      e)  $\frac{4}{3}$

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problemele 19 și 20 au în comun următorul enunț:**

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ , definit prin  $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Problema 19**

Șirul este convergent dacă și numai dacă  $x_0$  aparține mulțimii:

- a)  $[-1, 1]$                       b)  $(-\infty, 0]$                       c)  $[0, 1]$                       d)  $[1, \infty)$                       e)  $(-1, 1)$

Supliment G.M.

Răspuns corect:  c) ..... 1p

**Problema 20**

Dacă  $x_0 = \frac{1}{2}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$  este:

a) 1

b) 0

c)  $\frac{1}{2}$ 

d) nu există

e)  $\infty$ 

Supliment G.M.

Răspuns corect:  a) ..... 1p