Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM)
Ediția 2020-2021

Partener Upper.School

Etapa a III-a
Clasa a V-a

- Soluții -

Societatea de Științe Matematice din România

§1 Soluții

Problema 1

Aflati ultima cifră a numărului natural n, știind că penultima cifră a lui n^2 este 9.

Demonstrație:

Ultima cifră a lui n^2 nu poate fi $2, 3, 7, 8$, astfel încât ultimele două cifre ale lui n^2 ar putea fi $90, 91, 94, 95, 96$ sau 99.

- n^2 nu poate avea ultimele 2 cifre 95 pentru că un pătrat perfect impar, divizibil cu 5, trebuie să se termine în 25 (sau $5 \mid n$ și $25 \nmid n \implies n^2$ nu este pătrat perfect).
- Cum $90 = M_4 + 2, 94 = M_4 + 2 \implies n^2 = M_4 + 2$, dar un pătrat perfect nu poate fi $M_4 + 2$, deci n^2 nu poate avea ultimele 2 cifre 90 sau 94.
- Cum $91 = M_4 + 3$ și $99 = M_4 + 3 \implies n^2 = M_4 + 3$, dar un pătrat perfect nu poate fi $M_4 + 3$, deci n^2 nu poate avea ultimele 2 cifre 91 sau 99.

În concluzie rămâne singura variantă ca n^2 să aibă ultimele 2 cifre $96 \implies$ ultima cifră a lui n poate fi 4 sau 6. Ambele variante sunt corecte, de exemplu $14^2 = 196$ și $36^2 = 1296$

Barem:

- Arată că ultimele 2 cifre ale lui n^2 pot fi 90, 91, 94, 95, 96 sau 99. . . . . $1p$
- Demonstrează că ultimele 2 cifre ale lui n^2 nu pot fi 95. . . . . $1p$
- Demonstrează că ultimele 2 cifre ale lui n^2 nu pot fi 90 sau 94. . . . . $1p$
- Demonstrează că ultimele 2 cifre ale lui n^2 nu pot fi 91 sau 99. . . . . $1p$
- Arată că ultima cifră a lui n poate fi 4 sau 6. . . . . $1p$
- Pentru fiecare exemplu corect cu ultima cifră a lui n egală cu 4 respectiv 6 se acordă câte $1p$. . . . . $2p$

$\square$

Problema 2

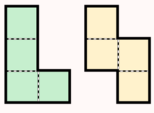
Dacă numărul natural a are n cifre, iar numărul natural a^4 are m cifre, arătați că suma $m + n$ nu poate fi egală cu 2021.

Demonstație și barem:

- a are n cifre $\iff 10^{n-1} \leq a < 10^n$. . . . . $1p$
- Atunci $10^{4n-4} \leq a^4 < 10^{4n}$. . . . . $1p$
- Prin urmare numărul a^4 poate avea $4n - 3, 4n - 2, 4n - 1$ sau $4n$ cifre. . . . . $1p$
- Deci $m + n$ este egal cu $5n - 3, 5n - 2, 5n - 1$ sau $5n$. . . . . $1p$
- adică este de forma $M_5 + 2, M_5 + 3, M_5 + 4$ sau M_5. . . . . $1p$
- Cum $2021 = M_5 + 1 \implies$ suma $m + n$ nu poate fi egală cu 2021. . . . . $2p$ $\square$

Problema 3

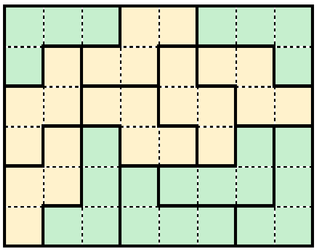
Se poate pava o tablă dreptunghiulară de 48 de pătrățele ($m \times n$, unde m și n sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2), utilizând piese de 4 pătrățele, de forma (tip 1), respectiv (tip 2), astfel încât să folosim un număr egal de piese din fiecare tip?



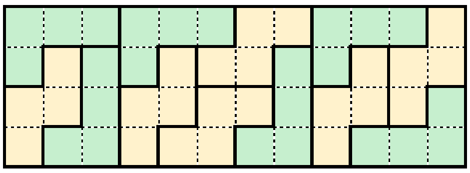
Observație: Prin pavare înțelegem acoperirea completă, cu piese, a tuturor pătrățelelor tablei, astfel încât să nu existe piese care se suprapun sau care ies parțial în afara tablei.

Demonstrație:
$48 : 4 = 12$ (piese de ambele tipuri), deci trebuie folosite 6 piese de tipul 1 și 6 piese de tipul 2. O tablă dreptunghiulară cu 48 de pătrățele poate avea următoarele dimensiuni: 8×6, 12×4, 16×3 sau 24×2, deci avem de analizat următoarele 4 cazuri:

- Pentru tabla de forma 8×6 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect.



- Pentru tabla de forma 12×4 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect.

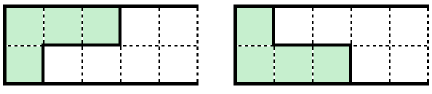


- Pentru tabla de forma 16×3, vom demonstra că NU se poate. Colorăm tabla în felul următor: prima linie cu negru, a doua cu alb și cea de-a treia tot cu negru. Vom avea astfel 32 de pătrățele negre și 16 albe.

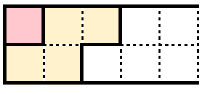
  O piesă de tipul 1 poate acoperi fie 3 pătrățele albe și una neagră, fie 3 pătrățele negre și una albă, iar o piesă de tipul 2, indiferent cum este așezată, va acoperi 2 pătrățele albe și 2 pătrățele negre.

  Cele 6 piese de tipul 1 pot acoperi cel mult 18 pătrățele negre, iar cele 6 piese de tipul 2 acoperă 12 pătrățele negre, deci, în total, putem acoperi cel mult 30 de pătrățele negre. Cum noi avem de acoperit 32 de pătrățele negre, rezultă că tabla nu se poate pava.

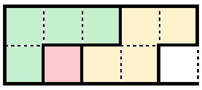
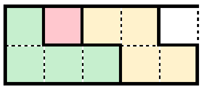
- Pentru tabla de forma 24×2, putem începe fie cu o piesă de tipul 1, după cum urmează



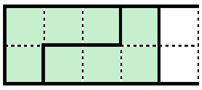
  fie cu o piesă de tipul 2, situație în care va rămâne o pătrățică neacoperită.



Dacă am început cu piesa de tipul 1 și continuăm cu o piesă de tipul 2, iarăși rămâne o pătrățică neacoperită.

Dacă vom continua tot cu o piesă de tipul 1, revenim în situația de la început.



În concluzie, nu putem pune pe tablă piese de tipul 2 fără să rămână pătrățele neacoperite, prin urmare tabla nu se poate pava.

Barem:

- Găsește un exemplu corect de pavare pentru o tablă de forma 8×6. . . . . $2p$
- Găsește un exemplu corect de pavare pentru o tablă de forma 12×4. . . . . $2p$
- Argumentează corect că o tablă de forma 16×3 nu poate fi pavată. . . . . $2p$
- Argumentează corect că o tablă de forma 24×2 nu poate fi pavată.. . . . . $1p$

$\square$

Problema 4

Aflați numerele naturale $x < y < z$ având suma 2021, știind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:

- Fiecare număr are cifrele distincte;
- Există 3 cifre distincte a, b, c astfel încât fiecare cifră a numerelor x, y și z este a, b sau c.

Demonstrație:

Deoarece $99 + 99 + 999 < 2017 \Longrightarrow$ trebuie să avem cel puțin 2 numere de 3 cifre.

Dacă toate cele 3 numere vor fi de 3 cifre $\Longrightarrow$ aceste cifre vor fi a, b, c, deci numerele vor avea aceleași cifre (dar în altă ordine) $\Longrightarrow$ numerele vor avea același rest la împărțirea cu 3 $\Longrightarrow$ suma numerelor va fi divizibilă cu 3. Cum $3 \nmid 2021 \Longrightarrow$ nu se poate $\Longrightarrow$ exact 2 numere vor fi de 3 cifre.

Deoarece $98 + 897 + 987 < 2021 \Longrightarrow$ cele două numere de 3 cifre trebuie să aibă amândouă prima cifră egală cu 9.

Avem de rezolvat ecuația $x + \overline{9bc} + \overline{9cb} = 2021$, unde $b < c < 9$ cifre și $x \leq 98$, $\Longleftrightarrow 11(b+c) + x = 221$. Cum $x \leq 98 \Longrightarrow 11(b+c) \geq 123 \Longrightarrow b+c \geq 12 \Longrightarrow b+c \in \{12, 13, 14, 15\}$.

- $b + c = 12 \Longrightarrow x = 89 \Longrightarrow c = 8 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow 89 + 948 + 984 = 2021$. Deci avem soluția $x = 89$, $y = 948$, $z = 984$.
- $b + c = 13 \Longrightarrow x = 78$, dar $7 + 8 \neq 13$
- $b + c = 14 \Longrightarrow x = 67$, dar $6 + 7 \neq 14$
- $b + c = 15 \Longrightarrow x = 56$, dar $5 + 6 \neq 15$, deci soluția găsită anterior este unică.

Barem:

- Demonstrează că sunt cel puțin 2 numere de 3 cifre. 1p
- Demonstrează că sunt exact 2 numere de 3 cifre. 2p
- Demonstrează că cele două numere de 3 cifre trebuie să aibă amândouă prima cifră egală cu 9. . . . . 1p
- Scrie ecuația $x + \overline{9bc} + \overline{9cb} = 2021$, unde $b < c < 9$ cifre și $x \leq 98$ și demonstrează că $b + c \in \{12, 13, 14, 15\}$. . . . . 1$p$
- Analizează cazul $b + c = 12$ și găsește soluția $x = 89$, $y = 948$, $z = 984$. 1p
- Analizează cazurile $b + c = 13$, $b + c = 14$ și $b + c = 15$ și nu identifică soluții în aceste cazuri. 1p

$\square$

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: 0p
Total: 28p