Olimpiada Națională Gazeta Matematică (ONGM)
Ediția 2020-2021

Partener Upper.School

Etapa a III-a
Clasa a VI-a

- Soluții -

Societatea de Științe Matematice din România

§1 Soluții

Problema 1

a) Scrieți numărul 2021 ca sumă de puteri distincte cu baza (-2).

b) Arătați că numărul 2021 nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3).

Demonstrație și barem:

- *a)* $2021 = (-2)^{12} + (-2)^{11} + (-2)^5 + (-2)^2 + (-2)^0$. . . . 3*p*
- *b)* $(-3)^k = M_3$, pentru orice $k \geq 1$. . . . 1*p*
- O sumă de puteri distincte cu baza (-3) ar putea avea ca termen pe $(-3)^0$ sau nu. În concluzie, o suma de puteri distincte cu baza (-3) poate avea următoarele forme: M_3 sau $M_3 + (-3)^0 = M_3 + 1$. . . . 2*p*
- Cum $2021 = M_3 + 2 \Longrightarrow 2021$ nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3). . . . 1*p* □

Problema 2

Pe o tablă sunt scrise numerele de forma $n(n+1)$, cu $n = 1, 2, 3, \ldots, 2020$. Un copil alege trei numere a, b și c de pe tablă, le șterge și scrie pe tablă numărul $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}$. După 1009 astfel de operații, unul dintre numerele rămase pe tablă este 47.

a) Calculați suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă.

b) Aflați celelalte numere rămase pe tablă.

Demonstraţie:

a)

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2020\cdot 2021} =$$
$$= \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2021-2020}{2020\cdot 2021} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

b) La fiecare operație se șterg 3 numere și se adaugă 1, deci după 1009 operații se pierd $1009 \cdot 2 = 2018$ numere din cele 2020 scrise inițial $\Longrightarrow$ pe tablă rămân 2 numere.

Deoarece $\dfrac{ab+ac+bc}{abc} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Longrightarrow$ inversul numărului scris pe tablă după ștergerea numerelor a, b, c este egal cu suma inverselor celor 3 numere $\Longrightarrow$ suma inverselor numerelor scrise pe tablă în orice moment este constantă, fiind egală cu suma inverselor numerelor scrise inițial, adică $\dfrac{2020}{2021}$.

În concluzie, obținem că $\dfrac{1}{47} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2020}{2021}$, unde x este celălalt număr rămas pe tablă $\Longrightarrow$ $43x + 2021 = 2020x \Longrightarrow x = \dfrac{2021}{1977}$, deci pe tablă au rămas numerele 47 și $\dfrac{2021}{1977}$

Barem:

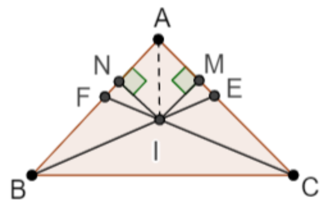
- a) Demonstrează că suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă este $\frac{2020}{2021}$. 2p
- b) Arată că după 1009 operații, pe tablă rămân 2 numere. 1p
- Demonstrează că inversul numărului scris pe tablă după ștergerea numerelor a,b,c este egal cu suma inverselor celor 3 numere. 2p
- Afirmă că suma inverselor numerelor scrise pe tablă în orice moment este constantă, fiind egală cu suma inverselor numerelor scrise inițial, adică $\frac{2020}{2021}$. 1p
- Demonstrează că pe tablă au rămas numerele 47 și $\frac{2021}{1977}$. 1p

□

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\sphericalangle A) > 90°$. Considerăm $(BE$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $E \in AC$ și $(CF$ bisectoarea $\sphericalangle ACB$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{I\}$. Stiind că $IE = IF$, arătați că $\triangle ABC$ este isoscel.

Demonstrație:



Fie $IN \perp AB$ și $IM \perp AC$. Deoarece I este centrul cercului înscris $\triangle ABC \Longrightarrow$ $(AI$ bisectoarea $\sphericalangle BAC \Longrightarrow IN = IM$.

Din $[IF] \equiv [IE]$ și $[IN] \equiv [IM] \overset{\text{I.C.}}{\Longrightarrow} \triangle IFN \equiv \triangle IEM \Longrightarrow \sphericalangle IFN \equiv \sphericalangle IEM \Longrightarrow \sphericalangle IFB \equiv \sphericalangle IEC$.

Din $\sphericalangle IFB \equiv \sphericalangle IEC$, $[IF] \equiv [IE]$, și $\sphericalangle FIB \equiv \sphericalangle EIC \overset{\text{U.L.U.}}{\Longrightarrow} \triangle IFB \equiv \triangle IEC \Longrightarrow [IB] \equiv [IC]$ $\Longrightarrow [BE] \equiv [CF] \Longrightarrow \triangle ABC$ isoscel.

Barem:

- Afirmă că $(AI$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ și că $d(I, AB) = d(I, AC)$. 2p
- Demonstrează că $\triangle IFN \equiv \triangle IEM \Longrightarrow \sphericalangle IFB \equiv \sphericalangle IEC$. . . . . 2$p$
- Demonstrează că $\triangle IFB \equiv \triangle IEC$. . . . . 2$p$
- Finalizare. 1p

□

Problema 4

Se consideră n unghiuri în jurul unui punct având măsurile în grade exprimate prin n numere prime distincte. Știind că unghiurile formate de bisectoarele oricăror două unghiuri adiacente dintre cele n date au măsurile în grade exprimate prin numere prime, să se determine valorile posibile ale lui n.

Demonstrație:

Notăm $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ cele n măsuri care sunt numere prime distincte $\Longrightarrow \dfrac{p_1+p_2}{2}, \dfrac{p_2+p_3}{2}, \ldots, \dfrac{p_n+p_1}{2}$ sunt numere prime.

Dacă $p_i = 2 \Longrightarrow p_{i+1}$ impar (pentru că numerele sunt distincte) $\Longrightarrow \dfrac{p_i+p_{i+1}}{2} \notin \mathbf{N}$, deci $p_i > 2$, iar toate $\dfrac{p_i+p_{i+1}}{2} > 2$ și sunt prime, deci impare.

Numerele prime impare sunt fie 3, fie de forma $M_{12}+r$, unde $r \in \{1,5,7,11\}$. Dacă există două numere $p_i = M_{12}+r_1$ și $p_{i+1} = M_{12}+r_2$, $r_1 \neq r_2$, cu $r_1, r_2 \in \{1,5,7,11\}$ atunci

$$\frac{M_{12}+r_1+M_{12}+r_2}{2} \in \{M_{12}+2; M_{12}+3\}$$

contradicție $\Longrightarrow$ toate numerele p_i sunt de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{1,5,7,11\}$ sau, eventual, unul dintre numere este egal cu 3.

Dacă toate numerele prime sunt diferite de $3 \Longrightarrow 360 = M_{12}+nr \Longrightarrow n = M_{12}$. Dar cea mai mică sumă a 12 numere distincte de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{1,5,7,11\}$ este

$$12 + 12 \cdot (0+1+\cdots+11) = 12 \cdot 67 > 360,$$

ceea ce nu se poate.

Dacă unul dintre numerele prime p_i este 3, atunci, deoarece $\dfrac{3+1}{2} = 2$ și $\dfrac{5+1}{2} = 3$, $\Longrightarrow r \in \{7,11\}$ iar $3 + M_{12} + (n-1)r = 360 \Longrightarrow n-1 = M_3$ și n par $\Longrightarrow n \in \{4, 10, \ldots\}$.

Dacă $n \geq 10$, cea mai mică sumă a 9 numere distincte de forma $M_{12}+r$, cu $r \in \{7,11\}$ este $63 + 12 \cdot (0+1+\cdots+8) = 495 > 357$, nu se poate $\Longrightarrow n$ poate fi doar 4 .

Pentru $n = 4$ avem, de exemplu, unghiurile cu măsurile de 3, 59, 167 și 131, iar măsurile unghiurilor formate de bisectoare vor fi de 31, 113, 149, respectiv 67 de grade.

Barem:

- Exprimă măsurile unghiurilor formate de bisectoare în funcție de măsurile celor n unghiuri. .... $1p$
- Justifică faptul că măsurile celor n unghiuri sunt mai mari decât 2 și că măsurile unghiurilor formate de bisectoare sunt numere impare. .... $1p$
- Demonstrează că toate numerele p_i sunt de aceeași formă $M_{12}+r$, cu $r \in \{1,5,7,11\}$ sau, eventual, unul dintre numere este egal cu 3. .... $1p$
- Demonstrează că măsura unui unghi este egală cu 3. .... $1p$
- Demonstrează că n este $M_6 + 4$. .... $1p$
- Demonstrează că $n = 4$. .... $1p$
- Găsește un exemplu. .... $1p$

□

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$