Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa I

Clasa a-V-a

29 ianuarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Un număr natural se numește "simetric" dacă are forma $\overline{abcba}$, cu a, b, c cifre distincte. De exemplu, numărul 72527 este "simetric", dar numărul 72727 nu este "simetric".

a) Care este cel mai mare număr "simetric"?

b) Câte numere "simetrice" există?

c) Calculați suma numerelor "simetrice" divizibile cu 5, care au suma cifrelor egală cu 27.

Demonstrație. *a*) Cel mai mare număr "simetric" este $\boxed{98789}$.
b) $\overline{abcba}$ trebuie sa aibă cifra $a \geq 1$; a poate lua 9 valori, b poate lua $10 - 1 = 9$ valori (b nu poate fi egal cu a), iar c poate lua $10 - 2 = 8$ valori (c nu poate fi a sau b). Aplicând regula produsului avem : $9 \cdot 9 \cdot 8 = \boxed{648}$ numere "simetrice".
c) Pentru a fi divizibil cu 5 un număr trebuie să aibă ultima cifră 0 sau 5. Cum $a \geq 1$ avem că $a = 5$. Numărul $\overline{5bcb5}$ are suma cifrelor $10 + 2b + c = 27$, de unde $2b + c = 17$. Cum 17 este număr impar, c este cifră impară diferită de 5.

$$c = 9 \implies b = 4$$

$$c = 7 \implies b = 5 \ \textit{contradicție}$$

$$c = 3 \implies b = 7$$

$$c = 1 \implies b = 8$$

Suma cerută este:

$$54945 + 57375 + 58185 = \boxed{170505}$$

Răspuns:

a) $\boxed{98789}$ .... $3p$

b) $\boxed{648}$ .... $3p$

c) $\boxed{170505}$ .... $4p$

□

Problema 2

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Care este cel mai mare divizor de două cifre al numărului $n = \overline{aba} + \overline{bab}$ dacă $a,\ b$ sunt cifre nenule de aceeași paritate?

b) Care este cel mai mare divizor număr prim al sumei celor mai mari două numere prime care au câte 2 cifre fiecare?

Demonstrație. *a*) $\overline{aba} + \overline{bab} = 111(a+b) = 3 \cdot 37 \cdot (a+b)$
Avem $2 \leq a+b \leq 18$; a, b sunt de acceași paritate, deci $a+b$ e par. Cum $3 \cdot 18 < 2 \cdot 37$, cel mai mare divizor de două cifre este $\boxed{74}$.
b) Cele mai mari 2 numere prime de 2 cifre sunt: 97 și 89. $97 + 89 = 186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$. Cel mai mare divizor prim este $\boxed{31}$.

Răspuns:

a) $\boxed{74}$ .... $5p$

b) $\boxed{31}$ .... $5p$

□

Problema 3

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Care este cel mai mic număr natural nenul, pătrat perfect, care este divizibil cu 2020?

b) Câte numere naturale mai mici ca 2020 sunt divizibile cu 6, dar nu sunt divizibile cu 4 sau cu 9?

c) Să se determine suma divizorilor primi ai numărului 2020.

Demonstrație. *a*) Descompunem $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pentru a fi pătrat perfect numărul căutat este de forma $2^{2a} \cdot 5^{2b} \cdot 101^{2c} \cdot d^2$, unde $2a \geq 2; 2b \geq 1; 2c \geq 1$ și $d \geq 1$. Pentru a găsi cel mai mic număr este suficient să luăm $a = b = c = d = 1$ și găsim $\boxed{1020100} = 1010^2 = 2020 \cdot 505$.
b) $2020 = 6 \cdot 336 + 4$. Sunt 336 numere divizibile cu 6. Dintre acestea $6 \cdot 1, 6 \cdot 2, ..., 6 \cdot 336$ cele divizibile cu 4 sunt cele de forma $6 \cdot 2k$, adică 168 de numere, iar cele divizibile cu 9 sunt cele de forma $6 \cdot 3k$, adică 112 numere. Numerele de forma $6 \cdot 6k$ le-am numărat de 2 ori, adică 56 de numere. Numerele care nu convin sunt $168 + 112 - 56 = 224$ numere, și rămân $336 - 224 = \boxed{112}$.
c) $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 \implies 2 + 5 + 101 = \boxed{108}$

Răspuns:

a) $\boxed{1020100}$ .... $3p$

b) $\boxed{112}$ .... $3p$

c) $\boxed{108}$ .... $4p$

$\square$

Problema 4

Pe tablă este scris numărul 22 de 13 ori, iar numărul 25 este scris de 15 ori. Câte numere trebuie să ștergem astfel încât suma numerelor rămase să fie 398?

Demonstrație.

$$22a + 25b = 398$$

De aici deducem că b este par.

$$b = 0 \implies 22a = 398 \ fără\ soluție$$

$$b = 2 \implies 22a = 348 \ fără\ soluție$$

$$b = 4 \implies 22a = 298 \ fără\ soluție$$

$$b = 6 \implies 22a = 248 \ fără\ soluție$$

$$b = 8 \implies 22a = 198 \implies a = 9$$

$$b = 10 \implies 22a = 148 \ fără\ soluție$$

$$b = 12 \implies 22a = 98 \ fără\ soluție$$

$$b = 14 \implies 22a = 48 \ fără\ soluție$$

$$9 \cdot 22 + 8 \cdot 25 = 398$$

Sunt $(13 - 9) + (15 - 8) = \boxed{11}$ numere șterse.

Răspuns: $\boxed{11}$ .... $10p$

$\square$

Problema 5

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Să se determine n pentru care: $20^{2020} = 10^{2000} \cdot 40^{20} \cdot 2^n$

b) Numărul $N = 5^{a+2} + 3 \cdot 7^{2a+3} + 3^3 \cdot 5^a + 3^2 \cdot 7^{2a+1} + \overline{75a9}$ este divizibil cu 13. Care este valoarea cifrei a?

Demonstrație. *a)*

$$20^{2020} = 10^{2000} \cdot 40^{20} \cdot 2^n \iff$$

$$2^{2020} \cdot 10^{2020} = 10^{2000} \cdot 10^{20} \cdot 4^{20} \cdot 2^n \iff$$

$$2^{2020} \cdot 10^{2020} = 10^{2020} \cdot 2^{40} \cdot 2^n \iff$$

$$2^{2020} = 2^{n+40} \iff n + 40 = 2020 \iff n = \boxed{1980}$$

b)

$$N = 5^{a+2} + 3 \cdot 7^{2a+3} + 3^3 \cdot 5^a + 3^2 \cdot 7^{2a+1} + \overline{75a9} \iff$$

$$N = 5^a(5^2 + 3^3) + 3 \cdot 7^{2a+1} \cdot (7^2 + 3) + \overline{75a9} \iff$$

$$N = 5^a \cdot 52 + 3 \cdot 7^{2a+1} \cdot 52 + \overline{a8} + 7501 \iff$$

$$N = 13 \cdot (4 \cdot (5^a + 3 \cdot 7^{2a+1}) + 577) + \overline{a8}$$

Am obținut astfel că N este divizibil cu 13 dacă și numai dacă $\overline{a8}$ este divizibil cu 13. Obținem soluția unică:

$$\overline{a8} = 78 = 13 \cdot 6 \implies a = \boxed{7}$$

Răspuns:

a) $\boxed{1980}$ .... $5p$

b) $\boxed{7}$ .... $5p$

$\square$

Problema 6

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră șirul $4^1, 4^2, \ldots, 4^{4n+2}$. Se aleg din șir doi termeni oarecare, se împarte cel mai mare la cel mai mic dintre acești termeni, iar în șir în locurile celor doi termeni se pune câtul împărțirii obținute. Noului șir i se aplică aceeași operație; se continuă până când rămâne un singur termen. Care este ultima cifră a ultimului număr scris pe tablă?

Demonstrație. Ultimul număr scris pe tablă are exponentul

$$\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm (4n + 2),$$

care are aceeași paritate cu suma exponenților. Suma exponenților este:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (4n + 2) = (4n + 3)(2n + 1)$$

și este un număr impar. Ultima cifră a ultimului număr scris pe tablă este $U(4^{2k+1}) = \boxed{4}$.

Răspuns: $\boxed{4}$ .... $10p$

$\square$

Problema 7

În fiecare dintre căsuțele unui tabel 2019×2019 scriem 0 sau 1. Care este numărul maxim de cifre de 0 care pot fi plasate astfel încât, pentru orice distribuție a acestora, să existe un 1 care să aibă toți vecinii egali cu el (vecinii sunt considerați și pe diagonală)?

Demonstrație. Putem împărți tabelul 2019×2019 în pătrate 3×3 disjuncte, deoarece $2019 = 3 \cdot 673$. Dacă plasăm câte un 0 în centrul fiecărui pătrat 3×3, nu va exista niciun 1 înconjurat de cifre de 1.
Dacă avem cel mult $673^2 - 1$ de 0-uri, atunci va exista un pătrat 3×3 în care nu există nicio cifră de 0, iar 1-ul din centrul acestuia va fi înconjurat numai de cifre de 1.
În concluzie, numărul căutat este $673^2 - 1 = \boxed{452928}$.

Răspuns: $\boxed{452928}$ .... $10p$

□

Problema 8

Numerele de la 2 la 50 se colorează în niște culori astfel încât dacă numărul n este colorat cu o culoare atunci orice divizor al lui se colorează cu aceeași culoare.

a) Care este cel mai mic număr de culori ce ar putea fi folosit?

b) Care este numărul maxim de culori ce poate fi folosit?

Demonstrație. *a*) Evident, putem folosi o singură culoare pentru toate numerele. Numărul minim posibil de culori este $\boxed{1}$.
b) Toate numerele pare sunt colorate cu aceeași culoare ca și 2. Oricare ar fi p prim, $p \leq 25$, avem $2p \leq 50$, deci $2p$ este în lista noastră și are aceeași culoare cu 2 și cu p. Astfel, orice număr prim mai mic ca 25 are aceeași culoare cu 2.
Rămân numerele prime mai mari ca 25: 29, 31, 37, 41, 43, 47, în total 6.
Atunci, numărul maxim de culori ce pot fi folosite este $\boxed{7}$.

Răspuns:

a) $\boxed{1}$ .... $5p$

b) $\boxed{7}$ .... $5p$

□

Problema 9

Numărul natural a are n cifre, iar a^5 are m cifre. Știind că $m + n = 2019$, care este valoarea lui $m - n$?

Demonstrație. Avem:

$$10^{n-1} \leq a < 10^n \implies 10^{5n-5} \leq a^5 < 10^{5n}$$

Cum, $10^{m-1} \leq a^5 < 10^m$ obținem:

$$10^{m-1} \leq a^5 < 10^{5n} \implies m - 1 < 5n$$

$$10^{5n-5} \leq a^5 < 10^m \implies 5n-5 < m$$

Prin urmare $5n-5 < m < 5n+1 \implies 5n-5 < 2019-n < 5n+1 \implies 2018 < 6n < 2024$. Așadar $n = 337$ și $m = 1682$, de unde $m - n = \boxed{1345}$.

Răspuns: $\boxed{1345}$ .... $10p$

□

Problema 10

Câte numere n au proprietatea că $\frac{n}{2}$ și $2n$ sunt numere naturale de 4 cifre?

Demonstrație. $\frac{n}{2}$ fiind număr de 4 cifre avem: $1000 \leq \frac{n}{2}$, de unde $2000 \leq n$. $2n$ fiind număr de 4 cifre avem și $2n < 10000$, adică $n \leq 4999$. În plus n trebuie să fie și par. Astfel n poate lua toate valorile pare de la 2000 la 4998. Acestea sunt în număr de: $\frac{1}{2} \cdot (4998 - 1998) = \boxed{1500}$

Răspuns: $\boxed{1500}$ .... $10p$

□